Déterminants

exercices

101 Un endomorphisme

Calculer le déterminant de l'endomorphisme

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP'(X+2) + P(1)(X^3-1). \end{array}$$

102 Des endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u \circ v + v \circ u = 0$, u est injectif et v surjectif. Montrer que n est pair.

103 Par blocs

Calculer le déterminant de la matrice $A = \left[\begin{array}{c|c} 0_n & I_n \\ \hline -I_n & 0_n \end{array}\right] \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

104 Un cas particulier du déterminant a,b,c du 109

Calculer le déterminant suivant de taille n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

105 Tridiagonal (cas particulier du 110)

Soit $a \in \mathbb{C}$. Considérons le déterminant suivant (de taille n) :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

En exhibant une relation de récurrence vérifiée par D_n, montrer que $D_n = \begin{cases} \dfrac{r^{n+1} - s^{n+1}}{r - s} & \text{si } a^2 \neq 4 \\ (1+n)r^n & \text{sinon} \end{cases}$

où r et s sont des complexes à cerner.

106 Imbriqué

Soit $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n$. Calculer le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix}.$$

107 Avec des coefficients binomiaux

Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant $D_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix}$.

108 cosinus

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et le déterminant de taille $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta. \end{vmatrix}$$

1. Déterminer Δ_1 et Δ_2.
2. Soit $n \geqslant 3$. Montrer que $\Delta_n = 2\cos\theta\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$.
3. En déduire alors Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

109 Le déterminant a,b,c

Soit $n \geqslant 2$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
On note $D(a, b, c)$ le déterminant de taille n suivant :

$$D(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & c & \cdots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}.$$

1. On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & D(a+x,\, b+x,\, c+x). \end{array}$
   Montrer que f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. En déduire la valeur de $D(a, b, c)$ pour $b \neq c$.

110 Tridiagonal

Soient a, b, c des réels et Δ_n le déterminant de la matrice $n \times n$ suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$.
2. On suppose que $a^2 = 4bc$. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $\Delta_n = \frac{(n+1)a^n}{2^n}$.

Déterminants classiques

111 Matrice compagnon

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$.

On considère la matrice $C_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$ appelée matrice compagnon de P.

On fixe $x \in \mathbb{K}$.
Calculer le déterminant $\det(xI - C_P)$.

112 Matrice pleine de 1

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pleine de 1 en taille $n = 3$.
Pour $x \in \mathbb{K}$, calculer $\det(J - xI)$.
En déduire les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $J - \lambda I$ soit non inversible.

113 Déterminant de Vandermonde

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On considère le déterminant de Vandermonde :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

On veut montrer, de différentes façons, que

$$(\bigstar) \qquad V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

1. Que fournit cette formule pour $n = 2$ et $n = 3$?
2. Donner une condition d'annulation de $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.
3. Est-ce que la réponse précédente est cohérente avec le résultat que vous connaissez sur l'inversibilité d'une matrice de Vandermonde (au fait, vous vous rappelez de la preuve ?) ? Et est-ce que vous vous souvenez du rang d'une telle matrice ?
4. **Première preuve.** Montrer la relation non évidente suivante (pour cela, faire apparaître des 0 sur la dernière ligne du déterminant $V(x_1, \dots, x_n)$)

   $$(\diamondsuit) \qquad V(x_1, \dots, x_n) = V(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k)$$

   Puis prouver la formule $(\bigstar)$ par récurrence sur n.
5. **Deuxième preuve.**
   Calculer $V(x_1, \dots, x_n)$ en considérant la fonction polynomiale $x \mapsto V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x)$ dont on déterminera les racines et son coefficient en x^{n-1}.
6. **Troisième preuve.**
   Montrer $(\bigstar)$ en faisant apparaître des 0 sur la première colonne.

114 Déterminant circulant

Soient $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & & & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & & & \alpha_{n-2} \\ & \alpha_{n-1} & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \alpha_2 & & & \ddots & \ddots & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & & \alpha_{n-1} & \alpha_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \ldots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \ldots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que Ω est inversible.
2. Calculer $A\Omega$ en fonction de ω et de $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$.
3. En déduire que $\det A = P(1)P(\omega) \cdots P(\omega^{n-1})$.
4. Application : calculer pour $a \in \mathbb{C}$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \ldots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \ldots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \ldots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & \ldots & a^{n-1} & 1 \end{vmatrix}.$$

115 Matrice de Gram

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n) \in E^n$. On pose $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad G_{i,j} = \langle e_i \mid e_j \rangle.$$

1. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre si et seulement si G est inversible.
2. On suppose que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et on note $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ la base orthonormée obtenue à partir de $\mathcal{B}$ par l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
   On pose $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$.
   Montrer que P est triangulaire supérieure et que $G = P^\top P$.
3. En déduire que

$$0 \;<\; \det(G) \;\leqslant\; \prod_{i=1}^{n} \|e_i\|^2$$

116 Trois endomorphismes classiques

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E.
Calculer $\det u$ et $\operatorname{tr} u$ dans chacun des cas suivants :

i) $E = \mathbb{C}_n[X]$ et $u : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

ii) $E = \mathbb{C}_n[X]$ et $u : P \mapsto P(X+1)$.

iii) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $u : M \mapsto M^\top$.

117 Un bel endomorphisme

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit g_A (resp. d_A) l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de multiplication à gauche (resp. à droite) par A

$$g_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \qquad d_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & MA \end{array}$$

1. Déterminer (en fonction de A bien sûr) le déterminant, la trace, et le rang de l'endomorphisme $g = g_A$.
2. On note Θ l'endomorphisme de transposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Exprimer $d_{A^\top}$ en fonction de g_A et de Θ.
3. Déduire des questions précédentes, le déterminant, la trace et le rang de d_A.
4. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AMB \end{array}$. Sans effort, déterminer le déterminant de f.

118 Un peu de proba

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire ne prenant que $n \in \mathbb{N}^*$ valeurs différentes $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.
Montrer que la connaissance des moments d'ordre i de X pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, à savoir $\left(\mathbf{E}\left(X^i\right)\right)_{i \in [\![1,n-1]\!]}$ permet d'accéder à la loi de X.
Expliciter le cas $n = 2$.

Autres exercices ...

119 Joli

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = (X + z_k)^n$.
Calculer le déterminant de la famille $(P_0, \dots, P_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

120 Matrices semblables : de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$

Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices carrées à coefficients *réelles*.
L'objectif est de prouver :

> **Lemme.** Si A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$, alors elles le sont sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$, ce que l'on écrit $BP = AP$.
   Écrivons $P = P_1 + \mathrm{i}P_2$ où P_1 et P_2 sont à coefficients réels.
   Montrer que
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad B(P_1 + tP_2) = A(P_1 + tP_2)$$
2. Prouver le lemme.

121 Déterminant d'une somme

Déterminer l'ensemble E :

$$E = \Big\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ \Big|\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(A + M) = \det A + \det M \Big\}$$

1. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que l'ensemble E est stable par l'application $\varphi_P : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & PA \end{array}$
2. Déterminer l'ensemble E.

Penser à considérer le rang de A.

122 Exotique

Soit $n \geqslant 2$ et $P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]$. Montrer que le déterminant D d'ordre n suivant est nul.

$$D = \begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \dots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \dots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \dots & P(2n-1) \end{vmatrix}$$

123 Densité des matrices inversibles

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes. Montrer :

$$\exists\, \alpha > 0, \quad \forall \varepsilon \in \,]-\alpha, \alpha[, \quad A + \varepsilon I_n \text{ est inversible.}$$

On considèrera la fonction $x \mapsto \det(A + xI)$.

124 Avec des fonctions

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, stable par multiplication et de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Le but de l'exercice est de montrer que $F = \mathrm{Vect}(\mathbb{1})$ où $\mathbb{1}$ est l'application constante égale à 1.

1. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathbb{1}) \subset F$.
2. Soit $f \in F$. On suppose que f est une application non constante.
   (a) Justifier qu'il existe deux réels α et β tels que $\alpha < \beta$ et $f([0,1]) = [\alpha, \beta]$.
   (b) Justifier qu'il existe des réels $x_1, \dots, x_{n+1} \in [0,1]$ tels que $\alpha < f(x_1) < \dots < f(x_{n+1}) < \beta$.
   (c) Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $\lambda_0 \mathbb{1} + \lambda_1 f + \dots + \lambda_n f^n = 0$.
   (d) Conclure.

Famille presque orthogonale

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

I – Une loi de probabilité

On dit qu'une variable réelle X suit la loi $\mathscr{R}$ si

$$X(\Omega) = \{-1, 1\}, \qquad \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

1. Si X suit la loi $\mathscr{R}$, préciser la loi de la variable aléatoire $\dfrac{1}{2}(X + 1)$.
2. Calculer l'espérance et la variance d'une variable suivant la loi $\mathscr{R}$.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant chacune la loi $\mathscr{R}$. Déterminer la loi de leur produit XY.

II – Paramètre de cohérence

On considère $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne usuelle, c'est-à-dire muni du produit scalaire défini par

$$\forall (u, v) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, \quad \langle u \mid v \rangle = u^\mathsf{T} v.$$

On désigne par I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ ayant au moins deux éléments et par $u = (u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs unitaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

4. Montrer que le nombre réel

$$C(u) = \sup\left\{ |\langle u_i \mid u_j \rangle|, \, (i, j) \in I^2, \, i \neq j \right\}$$

existe et appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

Le réel $C(u)$ s'appelle le *paramètre de cohérence* de la famille $(u_i)_{i \in I}$.

5. Montrer que si $C(u) = 0$, alors l'ensemble $\{u_i, \, i \in I\}$ est fini et donner un majorant de son cardinal.

III – Vecteurs aléatoires unitaires

Soient $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathscr{R}$. On définit les vecteurs aléatoires, $X = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ et $Y = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(Y_1, \ldots, Y_n)^\mathsf{T}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

6. Démontrer que, pour tout nombre réel t,

$$\mathrm{E}\big(\exp(t \langle X \mid Y \rangle)\big) = \left(\operatorname{ch}\left(\frac{t}{n} \right) \right)^n.$$

7. Montrer que, pour tout nombre réel t, $\ln(\operatorname{ch}(t)) \leqslant \dfrac{t^2}{2}$.
8. En déduire que, pour pour tout nombre réel t,

$$\mathrm{E}\big(\exp(t \langle X \mid Y \rangle)\big) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2n} \right).$$

Soient σ et λ deux nombres réels strictement positifs et Z une variable aléatoire réelle telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{E}\big(\exp(tZ)\big) \leqslant \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} \right).$$

9. En appliquant l'inégalité de Markov à une variable aléatoire bien choisie, montrer

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \mathbb{P}(Z \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t \right).$$

10. En déduire
$$\mathbb{P}(|Z| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right).$$

11. Soit $\varepsilon \in [0,1]$. Montrer
$$\mathbb{P}(|\langle X \mid Y\rangle| \geqslant \varepsilon) \ \leqslant\ 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

IV –Famille presque orthogonale

Soit $\varepsilon \in [0,1]$. On se propose de démontrer que, pour tout entier naturel $N \leqslant \exp\left(\frac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$, il existe une famille u de N vecteurs unitaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $C(u) \leqslant \varepsilon$. On dit alors que u est une famille *presque orthogonale*.
Soient N un entier naturel non nul et $\left(X_j^i\right)_{1\leqslant i\leqslant N, 1\leqslant j\leqslant n}$ une famille de $n \times N$ variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes de même loi $\mathscr{R}$.
Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on pose $X^i = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1^i, \dots, X_n^i)^{\mathsf{T}}$.

12. Déduire des questions précédentes que
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant N(N-1)\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

13. En déduire que, pour tout entier naturel $N \leqslant \exp\left(\frac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$, il existe une famille de N vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ dont le paramètre de cohérence est majoré par ε.

Déterminants

corrigés

104

En ajoutant à la première colonne les autres colonnes et en factorisant, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Puis, en retranchant la première colonne aux autres, on obtient :

$$D_n = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}$$

puisque le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes diagonaux.

105

Fixons $n \geqslant 3$ (confer plus loin pour comprendre).
En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$D_n = aD_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

En développant le second déterminant par rapport à la première colonne, on a :

$$D_n = aD_{n-1} - D_{n-2}.$$

De plus :

$$D_1 = a \text{ et } D_2 = a^2 - 1.$$

Résumons. On a donc

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad D_{n+2} = aD_{n+1} - D_n \\ D_1 = a \\ D_2 = a^2 - 1 \end{cases}$$

Remarque anecdotique. Si l'on veut, on peut introduire D_0, de sorte que la relation de récurrence soit vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, il faut poser $D_0 = 1$.

L'équation caractéristique $x^2 - ax + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = a^2 - 4$.
Notons r et s les racines, éventuellement confondues, du polynôme $X^2 - aX + 1$.

• Cas $\Delta \neq 0$.
Alors $\left(D_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \operatorname{Vect}\left((r^n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ (s^n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right)$.
Autrement dit, il existe λ, μ (ils sont même uniques) tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n = \lambda r^n + \mu s^n$$

Déterminons λ et μ à l'aide des conditions initiales.
On a le petit système

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & s \\ r^2 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} a \\ a^2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & s \\ r^2 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$$

La matrice ci-dessus est inversible (son déterminant est non nul car $r \neq s$!!) et on a

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \frac{1}{rs(s-r)} \begin{bmatrix} s^2 & -s \\ -r^2 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a^2 - 1 \end{bmatrix}$$

Simplifions l'expression de λ et μ.

En regardant la solution fournie, on doit trouver

$$\lambda = \frac{r}{r-s} \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{-s}{r-s}$$

Occupons-nous de λ (calcul similaire pour μ).
Il s'agit donc de montrer que $\frac{1}{rs}(s^2a - s(a^2-1)) = r$.
Les relations coefficients-racines fournissent $rs = 1$ et $r + s = a$.
En les exploitant, on obtient bien l'égalité annoncée.

Bilan dans ce cas. On a $D_n = \dfrac{r^{n+1} - s^{n+1}}{r-s}$.
• Cas $\Delta = 0$.
Je vous laisse montrer que, dans ce cas, $D_n = (1+n)r^n$.

Remarque. Les calculs ont été pénibles. Ceci est dû au fait que l'on a pris $n = 1$ et $n = 2$ comme valeurs initiales.
Essayons de voir ce que deviennent les calculs avec $n = 0$ et $n = 1$.
Déterminons λ et μ à l'aide des conditions initiales.
On a le petit système

$$\begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & s \\ r^2 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$$

La matrice ci-dessus est inversible (son déterminant est non nul car $r \neq s$!!) et on a

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \frac{1}{s-r} \begin{bmatrix} s & -1 \\ -r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

D'où

$$\lambda = \frac{1}{s-r}(s-a) \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{1}{s-r}(-r+a)$$

Comme $r + s = a$ (relation coefficients-racines), on a

$$\lambda = \frac{1}{s-r}(-r) \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{1}{s-r}s$$

106

On effectue successivement les opérations :

$$L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}, \quad L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \quad \ldots, \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1.$$

On obtient le déterminant triangulaire suivant :

$$D = \begin{vmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 - s_1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & s_n - s_{n-1} \end{vmatrix} = s_1 \prod_{k=2}^{n} (s_k - s_{k-1}).$$

109

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si l'on retranche la première colonne à chacune des autres colonnes, on obtient :

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ b+x & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-a \\ b+x & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

En utilisant la linéarité par rapport à la première colonne, on obtient :

$$f(x) = \begin{vmatrix} a & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ b & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-a \\ b & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ x & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-a \\ x & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant ne dépend pas de x, notons-le α.

Le deuxième peut se réécrire, en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne, sous la forme :

$$x\begin{vmatrix} 1 & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ 1 & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-a \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

Il est donc de la forme βx où β est un réel indépendant de x.

On en déduit que $f(x) = D(a+x, b+x, c+x) = \alpha + x\beta$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Donc, f est bien une fonction polynomiale de degré au plus 1.

2. Ainsi, $D(a,b,c) = f(0)$. On va donc chercher à déterminer les valeurs de α et β définis précédemment. Remarquons que :

$$f(-c) \;=\; \begin{vmatrix} a-c & 0 & \cdots & 0 \\ b-c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b-c & \cdots & b-c & a-c \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant étant celui d'une matrice triangulaire, il est égal au produit des termes de la diagonale :

$$f(-c) = (a-c)^n.$$

De la même manière, $f(-b) = (a-b)^n$.

Il ne reste plus qu'à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha - \beta c & = (a-c)^n \\ \alpha - \beta b & = (a-b)^n. \end{cases}$$

On obtient, après résolution, comme $b \neq c$:

$$\alpha = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{(a-c)^n - (a-b)^n}{b-c}.$$

Cela nous donne finalement :

$$D(a,b,c) = f(0) = \alpha = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$

115

1. **Sens direct** Supposons que $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.

   Vérifions que G est inversible en montrant que la famille de ses colonnes $(C_1, \ldots, C_n)$ est une famille libre.

   Soit donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$.

   Pour $i \in [\![1, n]\!]$, en examinant le $i^{\text{ème}}$ coefficient des colonnes qui vaut $G_{i,j} = \langle e_i \mid e_j \rangle$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_i \mid e_j \rangle = 0$$

   puis par bilinéarité du produit scalaire, $\langle e_i \mid \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \rangle = 0$.

   On en déduit que :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) \cap \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)^{\perp},$$

   Or cette intersection est réduite au vecteur nul, d'où $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0$.

   Par liberté de la famille $(e_1, \ldots, e_n)$, on obtient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

   Sens réciproque Supposons que G est inversible.

   Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0$.

   En remontant les calculs précédents, on obtient $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$,

   ce qui constitue une combinaison linéaire nulle de la famille des colonnes de la matrice inversible G.

   On en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

2. — Par construction, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $e_j \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_j)$, ce qui justifie que P est une matrice triangulaire supérieure.
   — Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
   Que vaut le coefficient $p_{i,j}$ de P ?
   Réponse : la coordonnée sur f_i du vecteur e_j.
   Comme la famille $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ est orthonormée, on sait que cette cooordonnée vaut $\langle e_j \mid f_i \rangle$.
   Ainsi, $p_{i,j} = \langle e_j \mid f_i \rangle$.
   On a alors
$$\mathrm{coeff}_{i,j}(P^\top P) = \sum_{k=1}^{n} p_{k,i} p_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i \mid f_k \rangle \langle e_j \mid f_k \rangle.$$
   Or, pour deux vecteurs x et y, on a
$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid f_k \rangle \langle y \mid f_k \rangle$$
   car la base orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$.
   En appliquant cette remarque à $x = e_i$ et $y = e_j$, on obtient
$$\mathrm{coeff}_{i,j}(P^\top P) = \langle e_i \mid e_j \rangle.$$
   On a donc montré que $\mathrm{coeff}_{i,j}(P^\top P) = \mathrm{coeff}_{i,j}(G)$.
   D'où $P^\top P = G$.
3. Montrons l'inégalité de gauche.
   D'après la question précédente, on a
$$\det(G) = \det(P^\top P) = \det(P^\top) \det(P) = \det(P)^2 \geqslant 0$$
   La matrice G est inversible donc de déterminant non nul.
   On a donc $\det(G) > 0$.
   Montrons l'inégalité de droite.
   Comme P est une matrice triangulaire, on a $\det(P)^2 = \prod_{j=1}^{n} (p_{j,j})^2 = \prod_{j=1}^{n} \langle e_j \mid f_j \rangle^2$.
   D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le caractère unitaire des vecteurs f_j, on a :
$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \langle e_j \mid f_j \rangle^2 \leqslant \|e_j\|^2.$$
   Par produit d'inégalités dont les termes sont positifs, on en déduit :
$$\det(G) \leqslant \prod_{j=1}^{n} \|e_j\|^2.$$

119

Notons D le déterminant que l'on cherche à calculer.
Par développement de P_k selon la formule du binôme de Newton, on obtient :
$$D = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} z_0^n & \binom{n}{0} z_1^n & \dots & \binom{n}{0} z_n^n \\ \binom{n}{1} z_0^{n-1} & \binom{n}{1} z_1^{n-1} & \dots & \binom{n}{1} z_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{n} z_0^0 & \binom{n}{n} z_1^0 & \dots & \binom{n}{n} z_n^0 \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \begin{vmatrix} z_0^n & z_1^n & \dots & z_n^n \\ z_0^{n-1} & z_1^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_0^0 & z_1^0 & \dots & z_n^0 \end{vmatrix}$$
$$D = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \prod_{i=0}^{n} \binom{n}{i} V(z_0, \dots, z_n) = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \prod_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n} (z_k - z_j)$$
On notera que dans le cas où $z_0, \dots, z_n$ sont distincts deux à deux, $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

123

Soit la fonction $P(x) = \det(A + xI)$.
P est un polynôme, il ne possède donc qu'un nombre fini de racines.
En particulier, il existe $\alpha > 0$ tel que P ne s'annule pas en x, pour $|x| < \alpha, x \neq 0$.
La caractérisation de l'inversibilité des matrices en fonction de la non-nullité des déterminants donne le résultat.

IV

I – Une loi de probabilité

1. La variable $\frac{1}{2}(X+1)$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
2. On peut faire un calcul direct.
   D'après la définition de l'espérance, on a :
   $$\mathrm{E}(X) \;=\; -1 \cdot \mathbb{P}(X=-1) \;+\; 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) \;=\; 0$$
   Avec le théorème de transfert, on a :
   $$\mathrm{E}(X^2) \;=\; (-1)^2 \cdot \mathbb{P}(X=-1) \;+\; 1^2 \cdot \mathbb{P}(X=1) \;=\; 1$$
   Donc $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 1$.
   Donc $\mathrm{E}(X) = 0$ et $\mathrm{V}(X) = 1$.

   Meilleure solution. En utilisant la question précédente.
   Posons $Y = \dfrac{1}{2}(X+1)$. On a donc $X = 2Y - 1$.
   Par linéarité de l'espérance, on a $\mathrm{E}(X) = 2\mathrm{E}(Y) - 1$.
   La variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli, donc on connaît son espérance, elle vaut $\dfrac{1}{2}$.
   Ainsi, $\mathrm{E}(X) = 2 \times \dfrac{1}{2} - 1 = 0$.
   Pour le calcul de $\mathrm{V}(X)$, on utilise que $\mathrm{V}(aY+b) = a^2\mathrm{V}(Y)$, et le fait que $\mathrm{V}(Y) = \dfrac{1}{4}$.
   On trouve $\mathrm{V}(X) = 1$.
3. Notons $Z = XY$. Alors Z prend les valeurs 1 et -1. Calculons $\mathbb{P}(Z=1)$.
   On a l'égalité d'événements
   $$(Z=1) \;=\; (X=1) \cap (Y=1) \;\sqcup\; (X=-1) \cap (Y=-1)$$
   Par additivité de $\mathbb{P}$, on obtient
   $$\mathbb{P}(Z=1) \;=\; \mathbb{P}(X=1, Y=1) \;+\; \mathbb{P}(X=-1, Y=-1)$$
   Puis par indépendance de X et Y, on a
   $$\mathbb{P}(Z=1) \;=\; \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(X=-1)\mathbb{P}(Y=-1) \;=\; \frac{1}{2}$$
   Enfin, $\mathbb{P}(Z=-1) = 1 - \mathbb{P}(Z=1) = \dfrac{1}{2}$.
   Donc Z suit aussi la loi $\mathscr{R}$.

II – Paramètre de cohérence

4. Notons $E = \big\{ |\langle u_i \mid u_j \rangle|, (i,j) \in I^2, i \neq j \big\}$.
   Comme I a au moins deux éléments, E est non vide.
   Soit $(i,j) \in I^2$ avec $i \neq j$.
   D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en utilisant le fait que les vecteurs sont unitaires, on a :
   $$|\langle u_i \mid u_j \rangle| \leqslant \|u_i\| \|u_j\| \quad = 1.$$
   Ainsi, E une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.
   Donc E admet une borne supérieure.
   Comme $E \subset [0,1]$, sa borne supérieure est dans $[0,1]$.
5. Supposons que $C(u) = 0$.
   Montrons que la famille u est orthogonale.
   Pour tout $(i,j) \in I^2$ avec $i \neq j$, on a $|\langle u_i \mid u_j \rangle| \leqslant 0$, donc $\langle u_i \mid u_j \rangle = 0$.
   La famille u est donc orthogonale et formée de vecteurs unitaires, donc elle est orthonormée.
   Donc elle est libre.
   C'est une famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie, en l'occurrence $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc cette famille est finie et de cardinal $\leqslant n$.

III – Vecteurs aléatoires unitaires

6. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors
$$\exp\left(t\langle X \mid Y\rangle\right) \;=\; \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t}{n} X_k Y_k\right) \;=\; \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{t}{n} X_k Y_k\right).$$
Or, d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $\exp\left(\frac{t}{n}X_1Y_1\right)$ et $\prod\limits_{k=2}^{n} \exp\left(\frac{t}{n}X_kY_k\right)$ sont indépendantes donc :
$$\mathrm{E}\left(\exp\left(t\langle X \mid Y\rangle\right)\right) = \mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{t}{n}X_1Y_1\right)\right)\mathrm{E}\left(\prod_{k=2}^{n}\exp\left(\frac{t}{n}X_kY_k\right)\right)$$
Explication. Les variables $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots, X_n, Y_n$ sont mutuellement indépendantes.
Posons $f : (x_1, y_1) \mapsto \exp(\frac{t}{n}x_1y_1)$ et $g : (x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) \mapsto \prod\limits_{k=2}^{n} \exp\left(\frac{t}{n}x_ky_k\right)$.
Le lemme des coalitions fournit que les variables $f(X_1, Y_1)$ et $g(X_2, Y_2, \ldots, X_n, Y_n)$ sont indépendantes.
Or pour **deux** variables aléatoires indépendantes, l'espérance du produit est le produit des espérances.
Donc $\mathrm{E}\big(f(X_1, Y_1) \times g(X_2, Y_2, \ldots, X_n, Y_n)\big) \;=\; \mathrm{E}\big(f(X_1, Y_1)\big) \times \mathrm{E}\big(g(X_2, Y_2, \ldots, X_n, Y_n)\big)$.
Cela s'écrit encore
$$\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{t}{n}X_kY_k\right) \;=\; \mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{t}{n}X_1Y_1\right)\right)\mathrm{E}\left(\prod_{k=2}^{n}\exp\left(\frac{t}{n}X_kY_k\right)\right)$$
Par une récurrence immédiate, on obtient
$$\mathrm{E}\left(\exp\left(t\langle X \mid Y\rangle\right)\right) = \prod_{k=1}^{n}\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{t}{n}X_kY_k\right)\right).$$
• Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Calculons $\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{t}{n}X_kY_k\right)\right)$.
La variable X_kY_k suit la loi $\mathscr{R}$ d'après 3, donc d'après le théorème de transfert, on a :
$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{t}{n}X_kY_k\right)\right) &= \mathbb{P}(X_kY_k = 1)\exp\left(\frac{t}{n}\times 1\right) \;+\; \mathbb{P}(X_kY_k = -1)\exp\left(\frac{t}{n}\times(-1)\right)\\ &= \frac{1}{2}\exp\left(\frac{t}{n}\right) \;+\; \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{t}{n}\right)\\ &= \mathrm{ch}\left(\frac{t}{n}\right).\end{aligned}$$
• Revenons au calcul de $\mathrm{E}\left(\exp\left(t\langle X \mid Y\rangle\right)\right)$. Par produit, on a donc :
$$\mathrm{E}\left(\exp\left(t\langle X \mid Y\rangle\right)\right) \;=\; \prod_{k=1}^{n}\mathrm{ch}\left(\frac{t}{n}\right) \;=\; \left(\mathrm{ch}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$

7. Posons $h : t \mapsto \frac{t^2}{2} - \ln(\mathrm{ch}(t))$ et montrons que h est positive sur $\mathbb{R}$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$$h' : t \mapsto t - \frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)}$$
Par inégalité de convexité (hum... à détailler, éventuellement mettre au même dénominateur et étudier le signe du numérateur), on obtient que h' est positive sur $\mathbb{R}^+$.
Et par imparité, h' est négative sur $\mathbb{R}^-$. D'où le tableau :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi h est positive sur $\mathbb{R}$. On a donc montré
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \ln(\mathrm{ch}(t)) \leqslant \frac{t^2}{2}$$
D'où par croissance de l'exponentielle,
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(t) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

8. D'après la question 7, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}\left(\frac{t}{n}\right) \leqslant \exp\left(\frac{(t/n)^2}{2}\right)$.
Comme les deux membres sont positifs, on obtient par croissance de la fonction puissance n sur $\mathbb{R}^+$:
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left(\operatorname{ch}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \leqslant \left(\exp\left(\frac{t^2}{2n^2}\right)\right)^n = \exp\left(\frac{t^2}{2n}\right).$$
En appliquant la question 6, on a :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{E}\left(\exp(t\langle X \mid Y\rangle)\right) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2n}\right).$$

9. L'inégalité est claire pour $t = 0$.
Supposons désormais $t > 0$.
Posons $T = \exp(tZ)$.
C'est une variable aléatoire positive, et qui admet une espérance finie par hypothèse.
On peut donc appliquer l'inégalité de Markov à T et au réel $\exp(\lambda t)$, on a :
$$\mathbb{P}(T \geqslant \exp(\lambda t)) \quad \leqslant \quad \frac{\mathrm{E}(T)}{\exp(\lambda t)}$$
En utilisant l'énoncé, à savoir $\mathrm{E}(T) \leqslant \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$, on obtient
$$\mathbb{P}(T \geqslant \exp(\lambda t)) \leqslant \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t\right)$$
Or on a l'égalité d'événements :
$$(T \geqslant \exp(\lambda t)) \;=\; (tZ \geqslant \lambda t) \;=\; (Z \geqslant \lambda)$$
D'où
$$\mathbb{P}(Z \geqslant \lambda) \;\leqslant\; \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t\right).$$

10. Montrons
$$\mathbb{P}(|Z| \geqslant \lambda) \quad \leqslant \quad 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right).$$
On a
$$\mathbb{P}(|Z| \geqslant \lambda) = \mathbb{P}(Z \geqslant \lambda) + \mathbb{P}(-Z \geqslant \lambda)$$
Posons $U = -Z$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tU) = \exp((-t)Z)$ admet une espérance finie et
$$\mathrm{E}\left(\exp(tU)\right) = \mathrm{E}\left(\exp((-t)Z)\right) \leqslant \exp\left(\frac{\sigma^2(-t)^2}{2}\right).$$
On peut donc appliquer la question 9 appliquée à la variable U, et on a donc :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{P}(U \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t\right).$$
Puis,
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{P}(|Z| \geqslant \lambda) = \mathbb{P}(Z \geqslant \lambda) + \mathbb{P}(U \geqslant \lambda) \quad \leqslant \quad 2\exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t\right).$$
On cherche alors t de sorte que : $\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t = -\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}$
ou encore $0 = \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t + \frac{\lambda^2}{2\sigma^2} = \left(\frac{\sigma t}{\sqrt{2}} - \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2$.
On pose donc $t = \frac{\lambda}{\sigma^2} \in \mathbb{R}^+$ et on obtient :
$$\mathbb{P}(|Z| \geqslant \lambda) \quad \leqslant \quad 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right).$$

11. On pose $Z = \langle X \mid Y\rangle$.
C'est une variable aléatoire réelle et pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'après la question 8, en posant $\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}}$, on a bien
$$\mathrm{E}(\exp(tZ)) \leqslant \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$
On prend alors $\epsilon \in [0, 1]$.
Si $\epsilon = 0$, l'inégalité demandée est évidente, sinon on applique la question 10 en prenant $\lambda = \epsilon$:
$$\mathbb{P}(|\langle X \mid Y\rangle| \geqslant \epsilon) \;\leqslant\; 2\exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right).$$

IV –Famille presque orthogonale

12. Par sous-additivité :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} \mathbb{P}\left(|\langle X^i \mid X^j\rangle| \geqslant \epsilon\right).$$

D'après la question 11, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, comme $X_1^i, \ldots, X_n^i, Y_1^j, \ldots, Y_n^j$ sont mutuellement indépendantes et de même loi $\mathscr{R}$, on a

$$\mathbb{P}(|\langle X^i \mid X^j\rangle| \geqslant \epsilon) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} 2\exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right) &= 2\exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right)\sum_{j=2}^{N}\sum_{i=1}^{j-1} 1\\ &= 2\exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right)\sum_{j=1}^{N-1} j\\ &= 2\exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right)\frac{N(N-1)}{2}\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geqslant \epsilon\right) \leqslant N(N-1)\exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right).$$

13. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \leqslant \exp\left(\frac{\epsilon^2 n}{4}\right)$. Alors $n \geqslant \frac{4\ln(N)}{\epsilon^2}$ et ainsi $-\frac{\epsilon^2 n}{2} \leqslant -2\ln(N)$.

Par croissance de l'exponentielle :

$$N(N-1)\exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right) \leqslant N(N-1)\exp(-2\ln(N)) = \frac{N(N-1)}{N^2} < 1.$$

D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geqslant \epsilon\right) \leqslant N(N-1)\exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right) < 1.$$

On en déduit

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| < \epsilon\right) > 0.$$

Ainsi, $\displaystyle\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| < \epsilon$ est non vide :

il existe au moins un $\omega \in \bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| < \epsilon$.

Posons $u_i = X^i(\omega)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$. Alors par définition, $\boxed{C(u) < \epsilon}$.