Fonctions de deux variables

I. Fonctions continues sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$

Ouverts de $\mathbb{R}^2$

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique:

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}. \end{array}$$

1 **Définition (boule ouverte de $\mathbb{R}^n$).**
Soit $p_0 \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. On appelle *boule ouverte* de *centre* p_0 et de *rayon* r la partie :

$$B(p_0, r) \;=\; \left\{p \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|p - p_0\| < r\right\}.$$

- **Pour $n = 1$.** À quoi ressemble une boule ouverte ?
- **Pour $n = 2$.** À quoi ressemble une boule ouverte ?

Ce chapitre considérera exclusivement le cas $\boxed{n = 2}$.
Dans ce cas, la boule ouverte $B(p_0, r)$ est aussi appelée *disque ouvert* de centre p_0 et de rayon r, et noté $D(p_0, r)$.

2 **Définition (ouvert de $\mathbb{R}^2$).**

— Soit $p_0 \in \mathbb{R}^2$.
Un voisinage de p_0 est une partie de $\mathbb{R}^2$ qui contient une boule ouverte de centre p_0.

— Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$.
On dit que U est un *ouvert* de $\mathbb{R}^2$ lorsque U est un voisinage de chacun de ses points :

$$\forall\, p_0 \in U, \quad \exists\, r > 0, \quad B(p_0, r) \subset U.$$

3 sol → 19 **Exemples.**

— Le demi-plan $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

— Plus généralement, $I \times \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ où I est un intervalle *ouvert* de $\mathbb{R}$.

— Encore plus généralement, $I \times J$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ où I et J sont des intervalles *ouverts* de $\mathbb{R}$.

— La droite $\Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\right\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

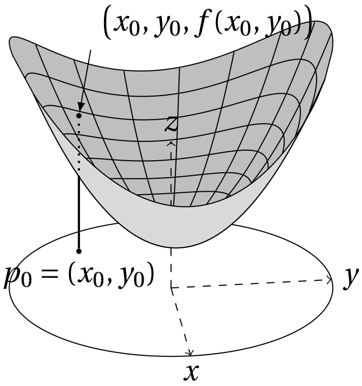
— Le disque unité ouvert est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

— Le plan $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

— Une boule ouverte est un ouvert !

Fonctions continues

Dans toute cette section, U désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.



Étant donné une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ et un point $p_0 = (x_0, y_0) \in U$, on notera indifféremment $f(p_0)$ ou $f(x_0, y_0)$ la valeur de f en ce point.
On peut représenter graphiquement une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ par son *graphe* :

$$\Gamma_f = \Big\{\big(x, y, f(x, y)\big) \mid (x, y) \in U\Big\},$$

qui est une partie de $U \times \mathbb{R}$, et donc de $\mathbb{R}^3$.

4 **Définition.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction et $p_0 = (x_0, y_0) \in U$.

— On dit que la fonction f est *continue en* p_0 lorsque :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall\, p \in U, \quad \Big(\|p - p_0\| \leqslant \delta \implies \big|f(p) - f(p_0)\big| \leqslant \varepsilon\Big)$$

ou encore $\qquad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall\, p \in U \cap B_f(p_0, \delta), \quad \big|f(p) - f(p_0)\big| \leqslant \varepsilon.$

— On dit que f est *continue* sur U lorsqu'elle est continue en tout point de U.

- **Remarque importante.** Dans ce chapitre, on essaiera de ne pas trop manipuler le symbole « flèche » désignant « tend vers ».
  Mais on pourrait tout à fait l'utiliser en redémontrant toutes les propriétés vues pour les fonctions d'une seule variable.
  Ainsi, on peut définir la notion de $f(p) \xrightarrow[p \to p_0]{} \ell$ (avec p_0 pas nécessairement dans U, mais dans l'adhérence de U) via :
  $$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall\, p \in U \cap B(p_0, \delta), \quad \big|f(p) - \ell\big| \leqslant \varepsilon.$$
  En particulier, on a la définition importante de « **tend vers** 0 **lorsque** $p \to p_0$ » :
  $$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall\, p \in U \cap B(p_0, \delta), \quad \big|f(p)\big| \leqslant \varepsilon.$$

  Look at this. Comme attendu, on a $\|p - p_0\| \xrightarrow[p \to p_0]{} 0$ $\quad$ (WHY ? Qui est f, qui est δ etc...)

Opérations

La définition de la continuité pour les fonctions de deux variables étant le calque de celle vue pour les fonctions d'une variable réelle, on obtient les mêmes théorèmes généraux concernant les opérations avec essentiellement les mêmes démonstrations.
On montre notamment que la somme, le produit et, si le dénominateur ne s'annule pas, le quotient de deux fonctions continues définies sur U sont des fonctions continues sur U.

From 1 to 2

5 preuve

Proposition (From 1 to 2 variables !).
Soit $\theta : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \theta(t) \end{array}$ une fonction continue (d'une seule variable).

Alors la fonction de deux variables $g : \begin{array}{ccc} I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \theta(x) \end{array}$ est continue.

- **Remarque.** Bien sûr, on a la même conclusion avec la variable y.

- **Fonctions polynomiales.** Montrons efficacement que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 7x^2y^3 + 8xy^5 \end{array}$ est continue.

- **Exemple classique.**
Montrer que les fonctions $\begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & r\cos\theta \end{array}$ et $\begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & r\sin\theta \end{array}$ sont continues.

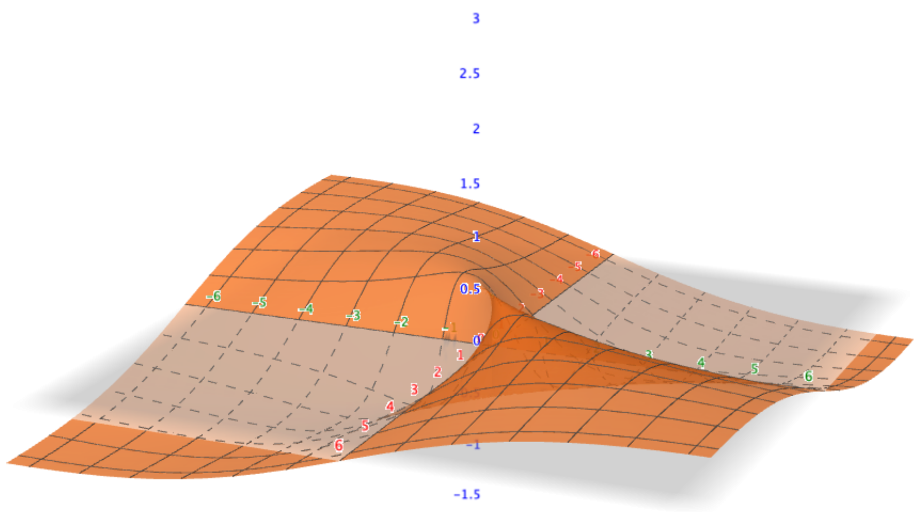
La fonction de PCSI 3

6 preuve

Proposition. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$

— est continue sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

— mais n'est pas continue en $(0,0)$



Composition et continuité (les 3 situations)

Ci-dessous, la lettre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial, les lettres U et V des ouverts non vides de $\mathbb{R}^2$.

7 **Proposition (composition à gauche).**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ à valeurs dans I.
Soit $\psi : I \to \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{cases} f \text{ continue en } p_0 \in U \\ \psi \text{ continue en } f(p_0) \end{cases} \implies \psi \circ f \text{ continue en } p_0$$

$$\text{où } \psi \circ f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & \longmapsto & \psi\big(f(p)\big) \end{array}$$

8 **Proposition (composition à droite, 1 variable).**
Soit γ_1 et $\gamma_2 : I \to \mathbb{R}$ telles que $\Gamma : t \mapsto \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$ soit à valeurs dans U.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{cases} \gamma_1 \text{ et } \gamma_2 \text{ continues en } t_0 \in I \\ f \text{ continue en } \Gamma(t_0) \end{cases} \implies f \circ \Gamma \text{ continue en } t_0$$

$$\text{où } f \circ \Gamma : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big) \end{array}$$

9 **Proposition (composition à droite, 2 variables).**
Soit φ_1 et $\varphi_2 : V \to \mathbb{R}$ telles que $\Phi : p \mapsto \big(\varphi_1(p), \varphi_2(p)\big)$ soit à valeurs dans U.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{cases} \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \text{ continues en } p_0 \in V \\ f \text{ continue en } \Phi(p_0) \end{cases} \implies f \circ \Phi \text{ continue en } p_0$$

$$\text{où } f \circ \Phi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & \longmapsto & f\big(\varphi_1(p), \varphi_2(p)\big) \end{array}$$

- **Rebelote.** Idem avec « sur » à la place de « en ».
- **Une sortie de route.** On voit dans les deux dernières propositions des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
  Demander de la régularité pour ces fonctions revient à demander la régularité en question pour les fonctions coordonnées, donc pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

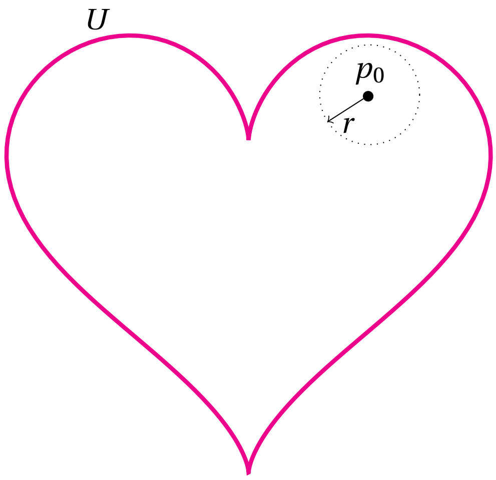
10 **Illustration de ces trois situations.**
Soif $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer que les fonctions suivantes sont continues.

$$f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \exp\big(f(x,y)\big) \end{array} \qquad f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t^2, t^3) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

II. Dérivées partielles

Dérivées partielles première et seconde

Soit $p_0 = (x_0, y_0) \in U$. Comme U est ouvert, on peut trouver $r > 0$ tel que $B(p_0, r) \subset U$.



- On considère les ensembles :

$$X_0 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in U\right\} \quad \text{et} \quad Y_0 = \left\{y \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in U\right\}$$

et les *applications partielles* :

$$f_{1,p_0} : \begin{array}{ccc} X_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x, y_0) \end{array} \quad \text{et} \quad f_{2,p_0} : \begin{array}{ccc} Y_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(x_0, y) \end{array}$$

- On a alors les inclusions :

$$\left]x_0 - r, x_0 + r\right[\subset X_0 \quad \text{et} \quad \left]y_0 - r, y_0 + r\right[\subset Y_0$$

- **Un os ?** Notons que X_0 et Y_0 ne sont pas nécessairement des intervalles, mais que cela n'a guère d'importance puisque la discussion est ici locale : seul ce qui se passe au voisinage de $x_0 \in X_0$ et $y_0 \in Y_0$ nous intéresse.
- **Remarque.** Lorsque U est un produit cartésien disons $I \times J$ (ce qui n'est pas le cas du ♡), alors les ensembles X_0 et Y_0 sont très simples, puisque $X_0 = I$ et $Y_0 = J$.

11 **Définition (dérivée partielle en un point).**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $p_0 = (x_0, y_0) \in U$.

— Si l'application partielle f_{1,p_0} est dérivable en x_0, on dit que f admet une *première dérivée partielle* au point p_0 et l'on pose :

$$\partial_1 f(p_0) = f'_{1,p_0}(x_0).$$

— Si l'application partielle f_{2,p_0} est dérivable en y_0, on dit que f admet une *seconde dérivée partielle* au point p_0 et l'on pose :

$$\partial_2 f(p_0) = f'_{2,p_0}(y_0).$$

- **Notation.** On utilise en pratique une notation plus parlante.
Pour une fonction f de deux variables dont on note (x, y) les variables, on note plutôt $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ le réel $\partial_1 f(x_0, y_0)$.
Autrement dit, on s'adapte souvent aux noms des variables apparaissant dans la définition de f.
Cette notation est potentiellement ambiguë, car les variables apparaissant dans la définition de f sont en fait des variables muettes, mais elle ne pose guère de problème à l'usage.

12 **Définition (fonctions dérivées partielles).**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$.
Si la fonction f admet des dérivés partielles en tout point de U, on appelle *première dérivée partielle* la fonction définie sur U qui à p_0 associe $\partial_1 f(p_0)$, et on la note $\partial_1 f$.
Idem pour la seconde variable.

13 sol → 19 **Question.** Considérons l'ouvert $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\right\}$ et la fonction $f : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^y \end{array}$

Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de H et les déterminer.

Opérations

14 **Proposition (somme et produit).**
Soit f et g deux fonctions de U dans $\mathbb{R}$.

— Si f et g admettent des dérivées partielles sur U, alors $f+g$ également, et on a :

$$\forall\, p \in U,\quad \frac{\partial(f+g)}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) + \frac{\partial g}{\partial x}(p) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(f+g)}{\partial y}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) + \frac{\partial g}{\partial y}(p).$$

— Si f et g admettent des dérivées partielles sur U, alors fg également, et on a :

$$\forall\, p \in U,\quad \frac{\partial(fg)}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)\,g(p) + f(p)\,\frac{\partial g}{\partial x}(p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial(fg)}{\partial y}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p)\,g(p) + f(p)\,\frac{\partial g}{\partial y}(p).$$

- **Remarque.** Il y a d'abord un énoncé en un point p_0 que je ne n'écris pas ici et qui permet d'en déduire la résultat sur U tout entier.

From 1 to 2

15 **Proposition (From 1 to 2 variables !).**
Soit $\theta : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \theta(t) \end{array}$ une fonction dérivable (d'une seule variable).

Alors la fonction de deux variables $g : \begin{array}{ccc} I\times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \theta(x) \end{array}$ admet des dérivées partielles sur $I\times J$ et on a :

$$\forall\,(x,y)\in I\times J,\qquad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \theta'(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Montrons que g admet des dérivées partielles en tout point de $I\times J$.
Fixons $p_0 = \ldots\ldots\ldots \in I\times J$.
Les applications partielles de g en ce point sont :

$$g_{1,p_0} : \begin{array}{ccc} \ldots\ldots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array} \qquad \text{et} \qquad g_{2,p_0} : \begin{array}{ccc} \ldots\ldots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array}$$

Ces fonctions sont dérivables sur leur ensemble de définition et on a

$$g'_{1,p_0} : \begin{array}{ccc} \ldots\ldots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array} \qquad \text{et} \qquad g'_{2,p_0} : \begin{array}{ccc} \ldots\ldots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array}$$

En particulier, au point p_0, on a

$$g'_{1,p_0}(\ldots) = \ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad g'_{2,p_0}(\ldots) = \ldots\ldots$$

Cela signifie que g admet des dérivées partielles au point p_0 et on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(p_0) = \ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(p_0) = \ldots\ldots$$

Ceci étant vrai pour tout point $p_0 \in I\times J$, on en déduit que g admet des dérivées partielles sur $I\times J$ et qu'elles sont données par :

$$\frac{\partial g}{\partial x} : \begin{array}{ccc} \ldots\ldots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \ldots\ldots & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} : \begin{array}{ccc} \ldots\ldots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \ldots\ldots & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array}$$

Dérivée selon un vecteur

16 **Définition.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction, $p \in U$ un point, $v = (x_v, y_v) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur.

La fonction $\varphi_{v,p} : t \mapsto f(p + tv)$ est définie au voisinage de 0.

On dit que la fonction de deux variables f admet une *dérivée en p selon le vecteur v* lorsque la fonction d'une seul variable $\varphi_{v,p}$ est dérivable en 0.

On note alors $D_v f(p)$ ce nombre dérivé $\varphi'_{v,p}(0)$.

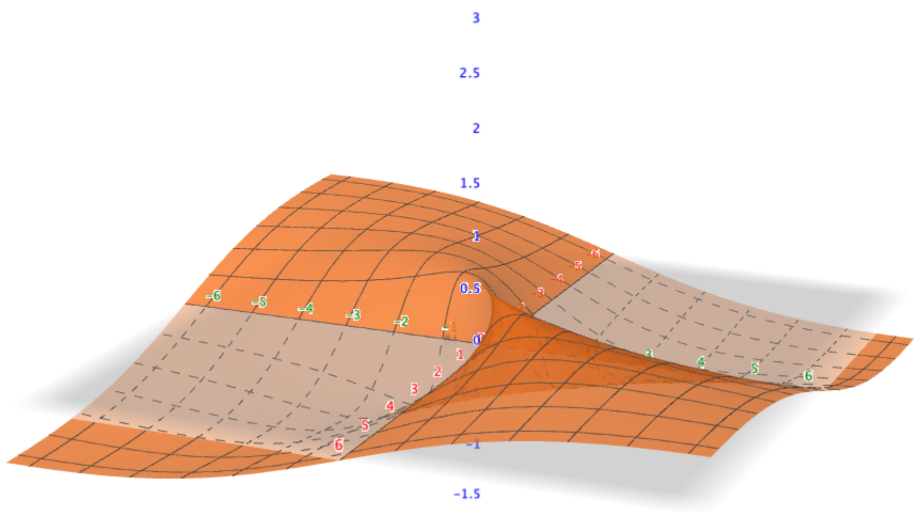
- **Rebelote.** Idem avec « sur » à la place de « en ».
- **Remarque.** Quel est le lien entre la dérivée en p selon le vecteur $v = (1,0)$, à savoir $D_{(1,0)} f(p_0)$, et la 1ère dérivée paritelle en p, à savoir $\partial_1 f(p) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(p)$.
- **Remarque à comprendre !** La fonction $\varphi_{v,p}$ correspond, lorsque $v \neq 0$, à la fonction f « le long de la droite » passant par p et dirigée par v.
  La notion de dérivée selon un vecteur généralise donc celle de dérivée partielle, en ne faisant plus jouer de rôle particulier aux droites parallèles aux axes de coordonnées.

La fonction de PCSI 3

17 preuve **Proposition.** La fonction $f :$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.



- **À méditer.** Pour une fonction d'une seule variable, la dérivabilité implique la continuité.
  La fonction de PCSI 3 admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$, mais pourtant n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$ (elle ne l'est pas en $(0,0)$).
  Ainsi, on comprend que l'existence des dérivées partielles n'est pas le pendant de la dérivabilité pour les fonctions de deux variables.
- **À retenir.** L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité. Pire, l'existence des dérivées selon tout vecteur n'entraîne pas la continuité (comme nous le verrons en TD).

18 **Définition.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$.
Si f admet des dérivées partielles sur U, on définit le *gradient* de f comme étant l'application :

$$\begin{array}{rccl} \nabla f : & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & p & \longmapsto & \nabla f(p) = \big(\partial_1 f(p),\, \partial_2 f(p)\big). \end{array}$$

- **Pour les yeux.**

$$\begin{array}{rccl} \nabla f : & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & \nabla f(x,y) = \big(\partial_1 f(x,y),\, \partial_2 f(x,y)\big). \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \nabla f : & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & \nabla f(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right). \end{array}$$

- **Champ de vecteurs.**
Géométriquement, $\nabla f(p) \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur du plan dont les coordonnées sont $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$.
Le gradient est alors un *champ de vecteurs*, c'est-à-dire une application dont les valeurs sont des vecteurs.

- **Exemple.** Considérons la fonction affine

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & 9x+8y+7. \end{array}$$

La fonction f admet un gradient (WHY) et on a :

III. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition et opérations

19 **Définition.** La fonction f est dite *de classe* $\mathscr{C}^1$ sur U lorsque :

— f admet des dérivées partielles en tout point de U

— les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U.

- **Notation.** On note $\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur U.

20 sol → 20 **Question.** Considérons l'ouvert $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$ et la fonction $f : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^y \end{array}$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur H.

21 **Proposition (opérations).** Soit $f, g \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$.
Alors la somme $f+g$ et le produit fg sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

From 1 to 2

22 **Proposition (From 1 to 2 variables !).**
Soit $\theta : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \theta(t) \end{array}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ (d'une seule variable).

Alors la fonction de deux variables $g : \begin{array}{ccc} I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \theta(x) \end{array}$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

La fonction de PCSI 3

23 **Proposition.** La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$

— est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

— mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

24 **Théorème (Développement limité à l'ordre 1).** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $p_0 = (x_0, y_0) \in U$.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, alors il existe alors une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(p) \xrightarrow[p \to p_0]{} 0$ et :

$$\forall\, p \in U, \qquad f(p) = f(p_0) + \langle \nabla f(p_0) \mid p - p_0 \rangle + \varepsilon(p)\, \| p - p_0 \|$$

$$\forall\, (x,y) \in U, \qquad f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \varepsilon(x,y)\, \| (x,y) - (x_0,y_0) \|.$$

- **Fonction d'une variable.** Pour une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ d'une seule variable, dérivable en $x_0 \in I$, on a
  - au voisinage de x_0 :
  $$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{\mathrm{o}}\big(|x - x_0|\big)$$
  - au voisinage de 0 :
  $$g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0) h + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}\big(|h|\big)$$

- **Écriture compacte.**
  - Au voisinage de p_0
  $$f(p) = f(p_0) + \langle \nabla f(p_0) \mid p - p_0 \rangle + \underset{p \to p_0}{\mathrm{o}}\big(\| p - p_0 \|\big)$$
  - Au voisinage de $\mathbf{0} = (0,0)$:
  $$f(p_0 + \mathbf{h}) = f(p_0) + \langle \nabla f(p_0) \mid \mathbf{h} \rangle + \underset{\mathbf{h} \to \mathbf{0}}{\mathrm{o}}\big(\| \mathbf{h} \|\big)$$
  $$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\, k + \underset{(h,k) \to (0,0)}{\mathrm{o}}\big(\| (h,k) \|\big).$$

- **Plan tangent.** Le théorème précédent affirme que la fonction affine :
$$(x,y) \longmapsto f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y - y_0)$$
approche au premier ordre la fonction f au voisinage du point (x_0, y_0).
En particulier, le plan d'équation:
$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y - y_0),$$
qui est le graphe de cette fonction affine, est le *plan tangent* du graphe de la fonction f en (x_0, y_0), c'est-à-dire de la surface d'équation $z = f(x,y)$.

25 preuve **Proposition ($\mathscr{C}^1$ implique $\mathscr{C}^0$).** Soit $f : U \to \mathbb{R}$.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, alors f est continue sur U.

IV. Composition et classe $\mathscr{C}^1$: les 3 situations

- **Rappel important.** Pour des fonctions d'une variable :

  Soit $f : I \to \mathbb{R}$ à valeurs dans J.
  Soit $g : J \to \mathbb{R}$.
  Si $\begin{cases} f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } I \text{ à valeurs dans } J \\ g \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } J \end{cases}$ *alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et*

$$\forall a \in I, \quad (g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)\, f'(a)$$

Composition avec une fonction d'une variable

26 preuve

Proposition.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ à valeurs dans I.
Soit $\psi : I \to \mathbb{R}$.
Si $\begin{cases} f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } U \text{ à valeurs dans } I \\ \psi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } I \end{cases}$ alors $\psi \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et

$$\forall p \in U, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\psi \circ f)}{\partial x}(p) = \psi'\big(f(p)\big)\dfrac{\partial f}{\partial x}(p) \\[2ex] \dfrac{\partial(\psi \circ f)}{\partial y}(p) = \psi'\big(f(p)\big)\dfrac{\partial f}{\partial y}(p) \end{cases}$$

- **Inverse d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.**
  En utilisant pour ψ la fonction inverse, on obtient par exemple que l'inverse d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ qui ne s'annule pas est encore de classe $\mathscr{C}^1$.

- **Quotient de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.**
  D'après la propriété pour le produit, on en déduit que si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ et si g ne s'annule pas, alors le quotient f/g est encore de classe $\mathscr{C}^1$.

27 sol → 22

Question. Montrer que la norme $N : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$ n'admet pas de dérivées partielles en $(0,0)$, mais que sa restriction à $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
Donner ses dérivées partielles.

28 preuve

Proposition (composition à droite, 1 variable).
Soit γ_1 et γ_2 deux fonctions définies sur I telles que $\Gamma : t \mapsto \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$ soit à valeurs dans U.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{cases} \gamma_1 \text{ et } \gamma_2 \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } I \\ f \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } U \end{cases} \implies f \circ \Gamma \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } I$$

et dans ce cas :

$$\forall\, t \in I, \quad (f \circ \Gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\Gamma(t)\big)\, \gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\Gamma(t)\big)\, \gamma_2'(t)$$

c'est-à-dire

$$(f \circ \Gamma)' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \circ \Gamma\right) \times \gamma_1' + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \circ \Gamma\right) \times \gamma_2'$$

- **Avec le gradient.** On peut écrire de façon concise la dérivée de $f \circ \Gamma$ à l'aide du gradient de f :

$$\forall\, t \in I, \quad (f \circ \Gamma)'(t) = \Big\langle \nabla f\big(\Gamma(t)\big) \,\Big|\, \Gamma'(t) \Big\rangle \qquad \text{où l'on a noté } \Gamma'(t) = \big(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)\big)$$

29 sol → 23

Question. Soit $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, avec u à valeurs dans $]0, +\infty[$.
Considérons $w : t \mapsto u(t)^{v(t)}$.
À l'aide de la règle de la chaîne, montrer que w est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer sa dérivée.
On considérera la fonction $f : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^y \end{array}$ définie sur l'ouvert $H = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\big\}$.

30 preuve

Proposition (dérivée selon un vecteur en un point). Soit $f : U \to \mathbb{R}$.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, alors f admet une dérivée selon tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ et on a :

$$\forall\, p \in U, \qquad D_v f(p) = \langle \nabla f(p) \mid v \rangle$$

c'est-à-dire en notant $v = (x_v, y_v)$:

$$\forall\, p \in U, \qquad D_v f(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)\, x_v + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\, y_v$$

- **Pour la culture.** Si v est un vecteur unitaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\big|D_v f(p)\big| = \big|\langle \nabla f(p) \mid v \rangle\big| \leqslant \|\nabla f(p)\|.$$

En outre, la dérivée $D_v f(p)$ est alors maximale (resp. minimale) si $\nabla f(p)$ est positivement (resp. négativement) colinéaire à v : elle vaut dans ce cas $\pm\|\nabla f(p)\|$.
Le gradient de f en p pointe donc dans la direction dans laquelle f croît le plus vite (qui est aussi, en sens inverse, celle où elle décroît le plus vite). Cela correspond à la direction de plus grande pente sur le graphe Γ_f.

Deuxième règle de la chaîne

31 preuve

Proposition (composition à droite, 2 variables).
Soit φ et ψ deux fonctions définies sur V telles que $\Phi : p \mapsto \big(\varphi_1(p), \varphi_2(p)\big)$ soit à valeurs dans U.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{cases} \varphi \text{ et } \psi \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } V \\ f \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } U \end{cases} \implies f \circ \Phi \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } V$$

et on a

$$\forall p \in V, \quad \begin{cases} \partial_1 (f \circ \Phi)(p) = \partial_1 f\big(\Phi(p)\big)\partial_1\varphi_1(p) + \partial_2 f\big(\Phi(p)\big)\partial_1\varphi_2(p) \\ \partial_2 (f \circ \Phi)(p) = \partial_1 f\big(\Phi(p)\big)\partial_2\varphi_1(p) + \partial_2 f\big(\Phi(p)\big)\partial_2\varphi_2(p). \end{cases}$$

- **Notation habituelle.**
  Si l'on note $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ et $\Phi : (u, v) \mapsto \big(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)\big)$, ces formules deviennent, selon la notation usuelle :

$$\forall p \in V, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial (f \circ \Phi)}{\partial u}(p) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(\Phi(p)\big)\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}(p) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(\Phi(p)\big)\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}(p) \\ \dfrac{\partial (f \circ \Phi)}{\partial v}(p) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(\Phi(p)\big)\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}(p) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(\Phi(p)\big)\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v}(p). \end{cases}$$

- Si l'on note $f : (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ et $\Phi : (u, v) \mapsto \big(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)\big)$, ces formules deviennent, selon la notation usuelle :

$$\forall p \in V, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial (f \circ \Phi)}{\partial u}(p) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\big(\Phi(p)\big)\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}(p) + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\big(\Phi(p)\big)\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}(p) \\ \dfrac{\partial (f \circ \Phi)}{\partial v}(p) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\big(\Phi(p)\big)\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}(p) + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\big(\Phi(p)\big)\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v}(p). \end{cases}$$

32 sol → 26

Question. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.
Montrer que $F : (u, v) \mapsto f(u + uv,\ u - uv^2)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer ses dérivées partielles.

On récapitule

33

Illustration de ces trois situations.
Soif $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Montrer que les fonctions g suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer leurs fonctions dérivées partielles.

$$f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \exp\big(f(x, y)\big) \end{array} \qquad f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t^2, t^3) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r, \theta) & \longmapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

V. Extrema

34 **Définition.**
Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}^2$, et soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction et $p_0 \in X$.

— On dit que f admet un *maximum* en p_0 lorsque $\forall\, p \in X,\quad f(p) \leqslant f(p_0)$.

— On dit que f admet un *maximum local* en p_0 lorsque :

$$\exists \eta > 0, \qquad \forall\, p \in X \cap B(p_0, \eta), \qquad f(p) \leqslant f(p_0).$$

— On définit de même les notions de *minimum* et de *minimum local*.

— On dit que f admet un *extremum* en p_0 si f admet un maximum ou un minimum en p_0.
On définit de même la notion d'*extremum local*.

- **Exemple 1.** La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2 \end{array}$ est positive, et nulle en $(0, 0)$.
Elle admet un minimum en $(0, 0)$.
En revanche, elle n'est pas majorée, donc n'admet pas de maximum.

- **Exemple 2.** Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$
Cette fonction est minorée (par 0) mais n'admet pas de minimum : si h admettait un minimum en (x_0, y_0), on en déduirait que la fonction d'une variable $x \mapsto \exp(x)$ admettrait un minimum en x_0, ce qui est impossible.

35 sol → 27
Question. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & (x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2). \end{array}$
Montrer que f admet en $(0, 0)$ un maximum local, qui n'est pas global.
C'est la fonction « cul de bouteille » de madame Tête.

36 **Définition.** Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $p_0 \in U$.
On dit que p_0 est un *point critique* pour f lorsque $\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = 0$,
c'est-à-dire lorsque $\nabla f(p_0) = (0,0)$.

37 preuve **Proposition.** Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $p_0 \in U$.
Si f admet un extremum local en p_0, alors p_0 est un point critique de f.

- **Point intérieur ?** Le théorème concernant les fonctions d'une variable, à avoir le lemme de l'extremum local, exigeait une hypothèse supplémentaire : le point était supposé intérieur à l'intervalle.

  Dans le théorème précédent, cette hypothèse est rendue superflue par le fait que U soit un ouvert de $\mathbb{R}^2$: le point p_0 est pour ainsi dire automatiquement dans l'intérieur de U.

- **Pour la culture.** On voit que, même si le théorème est énoncé dans le cadre d'une fonction globalement de classe $\mathscr{C}^1$, la démonstration n'utilise en fait que l'existence des dérivées partielles en p_0.

- **Attention.** Comme dans le cas des fonctions d'une variable, la réciproque du théorème est fausse : une fonction n'admet pas nécessairement d'extremum local en chacun de ses points critiques.

  Par exemple, considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3+y^3. \end{array}$

  On vérifie que f admet des dérivées partielles :
  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2.$$
  En particulier, l'origine $(0,0)$ est un point critique.
  Mais $(0,0)$ n'est pas un maximum local, car $\forall x > 0, f(x,0) > f(0,0)$.
  De même, $(0,0)$ n'est pas un minimum local.

- **Méthode.** Pour étudier les extrema (locaux ou globaux) d'une fonction $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$,
  - on trouve ses points critiques en résolvant les équations $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$;
  - pour chaque point critique (x_0,y_0), on cherche à déterminer
    le signe de $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ (ou bien au voisinage de (x_0,y_0), ou bien globalement),
    ou encore le signe de $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$ pour (h,k) au voisinage de $(0,0)$.

- **Retour sur l'exemple 1.** La fonction $f : (x,y) \mapsto x^2+y^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par opérations, et on a :
  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$
  Ainsi, un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est critique si et seulement si $2x = 2y = 0$: le seul point critique est l'origine $(0,0)$.
  Il ne peut donc y avoir aucun extremum local à l'exception de $(0,0)$, dont on a déjà vu qu'il s'agissait d'un minimum (global).

38 **Question.** Déterminer les extrema (locaux et globaux) des fonctions appartenant à $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ suivantes :

1. $f : (x,y) \mapsto e^{3x}\,y^2 + e^x\,y$
2. $f : (x,y) \mapsto 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y$
3. $f : (x,y) \mapsto \exp(x \operatorname{Arctan}(y))$
4. $f : (x,y) \mapsto \cos(x) + y^2$

VI. Lignes de niveau

Définition. On appelle *ligne de niveau* d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une partie de $\mathbb{R}^2$ d'équation $f(x, y) = c$, pour un certain $c \in \mathbb{R}$.

Si la fonction $\Gamma : I \to \mathbb{R}^2$ paramètre une ligne de niveau, c'est-à-dire si la composée $f \circ \Gamma$ est constante, on obtient pour tout $t \in I$, l'égalité $\langle \nabla f\big(\Gamma(t)\big) \mid \Gamma'(t) \rangle = 0$, c'est-à-dire que le gradient $\nabla f\big(\Gamma(t)\big)$ est orthogonal au vecteur dérivé $\Gamma'(t)$ qui dirige la tangente de la ligne de niveau au point $\Gamma(t)$.
Le gradient ∇f est *orthogonal aux lignes de niveau.*

Exemple. Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^2$ définie sur $U = \mathbb{R}^2$.
Cette fonction f possède des fonctions dérivées partielles définies sur U, et le gradient de f est donné par :

$$\begin{array}{rccl} \nabla f : & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & \big(4x\,(x^2 + y^2),\ 4y\,(x^2 + y^2)\big) \end{array}$$

Considérons une ligne de niveau $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$ où $c \in \mathbb{R}^+$.
Considérons un point (x_0, y_0) de cette ligne de niveau de sorte que $(x_0^2 + y_0^2)^2 = c$.
On a alors $\nabla f(x_0, y_0) = 4\sqrt{c}(x_0, y_0)$, qui est donc colinéaire à (x_0, y_0), lui-même orthogonal au vecteur tangent à la courbe de niveau.
Ainsi, $\nabla f(x_0, y_0)$ est orthogonal à la ligne de niveau.

Prouvons cette affirmation.
Considérons une fonction Γ qui paramètre cette ligne de niveau, c'est-à-dire une fonction $\Gamma : I \to \mathbb{R}^2$ à valeurs dans U telle que $f \circ \Gamma = c$ (la composée est constante égale à c).
Ici, on peut prendre

$$\begin{array}{rccl} \Gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Un point (x_0, y_0) de la courbe de niveau s'écrit donc $\Gamma(t_0)$ pour un certain t_0 (non nécessairement unique).
Il s'agit de montrer que $\Big\langle \nabla f\big(\Gamma(t_0)\big) \,\Big|\, \Gamma'(t_0) \Big\rangle = 0$.
Or

$$\nabla f\big(\Gamma(t_0)\big) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \text{et} \qquad \Gamma'(t_0) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Le produit scalaire de ces deux vecteurs est donc nul.

Fonctions de deux variables

preuve et éléments de correction

3

(i) Soit $p=(a,b)\in H$. On a donc $a>0$.
Montrons $D(p,a)\subset H$, ce qui conclura. Soit $p=(x,y)\in D(p,a)$.
On a $(x-a)^2\leqslant(x-a)^2+(y-b)^2=\|p-p\|^2<a^2$, d'où l'encadrement $-a<x-a<a$.
Il s'ensuit $x>0$, donc $p\in H$.

(ii) Soit $p\in D\big((0,0),1\big)$. On a donc $\|p\|<1$.
Posons $r=1-\|p\|$. On a bien $r>0$, et l'on va montrer l'inclusion $D(p,r)\subset D(0,1)$, ce qui conclura.
Soit $p\in D(p,r)$.
On a $\|p\|\leqslant\|p\|+\|p-p\|$ d'après l'inégalité triangulaire, d'où $\|p\|<\|p\|+1-\|p\|=1$, ce qui prouve $p\in D(0,1)$.
On montrerait de la même façon que tout disque ouvert est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(iii) Soit $r>0$. Le disque ouvert $D\big((0,0),r\big)$ contient le point $(0,r/2)$, qui n'appartient pas à Δ.
On en déduit qu'aucun disque ouvert de centre $(0,0)$ n'est inclus dans Δ, ce qui montre que Δ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

5

Soit $p=(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Montrons que g est continue en p_0.
Soit $\varepsilon>0$.
Par continuité de θ, on peut trouver $\delta>0$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad |x-a|\leqslant\delta\implies\big|\theta(x)-\theta(a)\big|\leqslant\varepsilon$$

Posons $\eta=\delta$.
Soit $p=(x,y)\in\mathbb{R}^2\cap D(p,\eta)$.
Comme $|x-a|\leqslant\|p-p\|<\eta$, on a :

$$\big|g(p)-g(p)\big|\;=\;\big|g(x,y)-g(a,b)\big|\;=\;\big|\theta(x)-\theta(a)\big|\;\leqslant\;\varepsilon$$

6

Montrons que f n'est pas continue en $(0,0)$.
Par l'absurde, si f était continue en $(0,0)$, la fonction $t\longmapsto f(t,t)$ serait continue en 0 par composition. Or

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad f(t,t)=\begin{cases}\dfrac{t^2}{t^2+t^2}=1/2 & \text{si } t\neq0\\ \qquad 0 & \text{si } t=0.\end{cases}$$

qui n'est pas continue en 0.

13

Soit $p=(a,b)\in H=\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$. Montrons que f admet des dérivées partielles en p_0.

— L'application partielle $\varphi_1:x\longmapsto x^b$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $\varphi_1':x\longmapsto b\,x^{b-1}$.
Donc f admet une première dérivée partielle en p_0 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=b\,a^{b-1}.$$

— L'application partielle $\varphi_2 : y \mapsto a^y = \exp\big(y\ln(a)\big)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\varphi_2' : y \mapsto \ln(a)\exp\big(y\ln(a)\big) = \ln(a)\, a^y$.

Donc f admet une deuxième dérivée partielle en p_0 :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \ln(a)\, a^b.$$

$\boxed{17}$

Fixons $p = (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

— Montrons que f admet une première dérivée partielle en p_0.

— Si $b \neq 0$, l'application partielle $f_{1,p} : x \mapsto f(x,b) = \dfrac{xb}{x^2+b^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc dérivable en a, et on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \;=\; \frac{b(b^2-a^2)}{(a^2+b^2)^2}.$$

— Si $b = 0$, l'application partielle $f_{1,p} : x \mapsto f(x,0) = 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc dérivable en a, et on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = 0.$$

Bilan. La fonction f admet une première dérivée partielle en p_0 et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \begin{cases} \dfrac{b(b^2-a^2)}{(a^2+b^2)^2} & \text{si } b \neq 0 \\ 0 & \text{si } b = 0. \end{cases}$$

— Par symétrie, on obtient que f admet une deuxième dérivée partielle en p_0 et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \begin{cases} \dfrac{a(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2} & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

$\boxed{20}$

On a montré que f admet en tout point de H des dérivées partielles.
Ainsi, f possède des fonctions dérivées partielles définies sur H :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dots. \end{array} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dots. \end{array}$$

Ces fonctions sont continues sur H (WHY).
Donc la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur H.

$\boxed{25}$

Fixons $p \in U$.
Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, on peut écrire un DL_1 au point p_0 :

$$f(p) \;=\; f(p) \;+\; \langle \nabla f(p) \mid p-p \rangle \;+\; \varepsilon(p)\|p-p\|$$

Par inégalité triangulaire et Cauchy-Schwarz, on a

$$|f(p)-f(p)| \leqslant \|\nabla f(p)\| \, \|p-p\| \; + \; |\varepsilon(p)| \|p-p\|$$

D'où

$$|f(p)-f(p)| \leqslant \Big(\|\nabla f(p)\| \; + \; |\varepsilon(p)|\Big) \, \|p-p\|$$

On conclut en disant que le membre droit tend vers 0 quand $p \to p$.
On peut le redémontrer en fixant ε' et en disant que la parenthèse est bornée par un certain M, et qu'en posant $\eta = \varepsilon'/M$, on a $\|p-p\| \leqslant \eta$.

Reste du passé (TT1). Montrons que f est continue en p_0, c'est-à-dire montrons que

$$f(a+h, b+k) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} f(a,b)$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, on peut écrire un DL_1 au point (a,b) :

$$f(a+h, b+k) \; = \; f(a,b) \; + \; h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \; + \; k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \; + \; \varepsilon(h,k)\,\|(h,k)\|,$$

Or

$$h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \; + \; k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \; + \; \varepsilon(h,k)\,\|(h,k)\| \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$$

D'où le résultat.

26

Montrons que $\psi \circ f$ admet une fonction première dérivée partielle et que cette fonction est continue.
Pour cela, on montre que $\psi \circ f$ admet une première dérivée partielle en un point $p = (a,b) \in U$ fixé.
• **Première dérivée partielle en** p_0**.** Notons

$$\begin{array}{rccl} \kappa_{1,p} : & D_{1,p} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (\psi \circ f)(x,b) \end{array}$$

de telle sorte que $\kappa_{1,p} = \psi \circ f_{1,p}$ où $f_{1,p}$ est la première dérivée partielle de f en p_0.
D'après le théorème pour la composée de fonctions de 1 variable, on en déduit que κ_1 est dérivable en a et l'on obtient :

$$\kappa'_{1,p}(a) \; = \; \psi'\big(f_{1,p}(a)\big)\, f'_{1,p}(a)$$

Ainsi, $\psi \circ f$ admet une première dérivée partielle en p_0 et on a :

$$\frac{\partial(\psi \circ f)}{\partial x}(p) \; = \; \psi'\big(f(p)\big)\frac{\partial f}{\partial x}(p)$$

• **Première dérivée partielle sur** U**.**
Ceci étant vrai pour tout point $p \in U$, on en déduit que $\psi \circ f$ admet une fonction première dérivée partielle qui vaut :

$$\frac{\partial(\psi \circ f)}{\partial x} \; = \; (\psi' \circ f) \times \frac{\partial f}{\partial x}$$

• **Aspect** $\mathscr{C}^1$ **sur** U

— La dérivée ψ' est continue (car ψ est de classe $\mathscr{C}^1$)

— La fonction f est continue (car f de classe $\mathscr{C}^1$).

— La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue (car f de classe $\mathscr{C}^1$).

Par produit, on en déduit que $\frac{\partial(\psi \circ f)}{\partial x}$ est continue.
On procède alors exactement de même pour la deuxième dérivée partielle.

27

— Considérons la première application partielle de N en $p=(0,0)$

$$x \longmapsto N(x,0)=|x|$$

Cette fonction n'est pas dérivable en 0.
Donc la fonction N n'admet pas de première dérivée partielle en $(0,0)$.

— Idem pour la deuxième dérivée partielle.

— Sur $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
Par opérations, l'application $N^2:(x,y)\mapsto x^2+y^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, et

$$\frac{\partial(N^2)}{\partial x}:(x,y)\longmapsto 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial(N^2)}{\partial y}:(x,y)\longmapsto 2y$$

Cette application N^2 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction racine carrée est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par composition, la fonction $N=\sqrt{N^2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et :

$$\frac{\partial N}{\partial x}:(x,y)\longmapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial y}:(x,y)\longmapsto \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

28

Soit $t_0 \in I$.
Montrons que $f \circ \Gamma$ est dérivable en t_0 en exhibant un $\mathrm{DL}_1(t_0)$.
Posons $p = \Gamma(t_0) = \big(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)\big)$, qui appartient à U.
Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, il existe une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to p]{} 0$ et :

$$\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) \;=\; f(p) \;+\; \frac{\partial f}{\partial x}(p)\,\big(x - \gamma_1(t_0)\big) \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(p)\,\big(y - \gamma_2(t_0)\big) \;+\; \varepsilon(x,y)\,\|(x,y) - p\|.$$

Comme $\Gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in U$ pour tout $t \in I$, on a

$$\forall t \in I, \quad \underbrace{f\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)}_{f\circ\Gamma(t)} \;=\; f(p) \;+\; \frac{\partial f}{\partial x}(p)\;\underbrace{\big(\gamma_1(t) - \gamma_1(t_0)\big)}_{\gamma_1'(t_0)(t-t_0)+\mathrm{o}(t-t_0)} \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(p)\;\underbrace{\big(\gamma_2(t) - \gamma_2(t_0)\big)}_{\gamma_2'(t_0)(t-t_0)+\mathrm{o}(t-t_0)} \;+\; \varepsilon\big(\Gamma(t)\big)\,\|\Gamma(t) - p\|.$$

Écrivons les petits o avec des fonctions ε_1 et ε_2.

$$\forall t \in I, \quad f\circ\Gamma(t) \;=\; f(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p)\,\big(\gamma_1'(t_0)(t-t_0)+\varepsilon_1(t)(t-t_0)\big) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\,\big(\gamma_2'(t_0)(t-t_0)+\varepsilon_2(t)(t-t_0)\big) + \varepsilon(\Gamma(t))\,\|\Gamma(t)-p\|.$$

d'où

$$\forall t \in I, \quad f\circ\Gamma(t) \;=\; f(p) \;+\; \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(p)\,\gamma_1'(t_0) \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(p)\,\gamma_2'(t_0)\Big)(t - t_0) \;+\; \theta(t)(t - t_0)$$

où on a posé :

$$\begin{array}{rccl} \theta : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(p)\,\varepsilon_1(t) \;+\; \dfrac{\partial f}{\partial y}(p)\,\varepsilon_2(t) \;+\; \varepsilon(\Gamma(t))\,\frac{\|\Gamma(t)-p\|}{t-t_0} & \text{si } t \neq t_0 \\ 0 & \text{si } t = t_0 \end{cases} \end{array}$$

Montrons que $\theta(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$.
Comme $\varepsilon_1(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$ et $\varepsilon_2(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$, il suffit de montrer que $\varepsilon\big(\Gamma(t)\big)\,\frac{\|\Gamma(t)-p\|}{t-t_0} \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$.

— Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\left|\frac{\|\Gamma(t) - p\|}{t - t_0}\right| \;\leqslant\; \left|\frac{\gamma_1(t) - \gamma_1(t_0)}{t - t_0}\right| + \left|\frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(t_0)}{t - t_0}\right|.$$

Explication. Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on a $\|(h,k)\| \leqslant \|(h,0)\| + \|(0,k)\| = |h| + |k|$

Comme le terme de droite converge vers $\big|\gamma_1'(t_0)\big| + \big|\gamma_2'(t_0)\big|$, il est borné au voisinage de t_0, et il en va alors de même du terme de gauche.

— De plus, on a $\varepsilon\big(\Gamma(t)\big) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$ par continuité de γ_1 et γ_2 en t_0 et le fait que $\varepsilon(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to p]{} 0$.

La fonction $f \circ \Gamma$ admet un $\mathrm{DL}_1(t_0)$, donc est dérivable en t_0 et on a

$$(f\circ\Gamma)'(t_0) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(p)\,\gamma_1'(t_0) \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(p)\,\gamma_2'(t_0).$$

ce qui se réécrit :

$$(f\circ\Gamma)'(t_0) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\big(\Gamma(t_0)\big)\,\gamma_1'(t_0) \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}\big(\Gamma(t_0)\big)\,\gamma_2'(t_0).$$

On a donc montré l'égalité de fonctions :

$$(f\circ\Gamma)' \;=\; \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\circ\Gamma\Big)\times\gamma_1' \;+\; \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\circ\Gamma\Big)\times\gamma_2'$$

On constate que cette fonction dérivée est continue par opération, d'où l'aspect $\mathscr{C}^1$ de $f\circ\Gamma$.

29

Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^y \end{array}$ définie sur l'ouvert $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.
On a $w(t) = f\big(u(t), v(t)\big)$.
On note $\Gamma : t \mapsto (u(t), v(t))$, de sorte que $w = f \circ \Gamma$.

— Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I = \mathbb{R}$ et $\Gamma = (u, v)$ est à valeurs dans H.
— La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur H et ses dérivées partielles sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \longmapsto y\,x^{y-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \longmapsto \ln(x)\,x^y.$$

D'après la première règle de la chaîne, on en déduit que la fonction $w = f \circ \Gamma$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\begin{aligned} \forall\, t \in I, \qquad w'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(u(t), v(t)\big)\, u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(u(t), v(t)\big)\, v'(t) \\ &= u'(t)\, v(t)\, u(t)^{v(t)-1} + v'(t)\ln\big(u(t)\big)\, u(t)^{v(t)} \\ &= \left(\frac{u'(t)\, v(t)}{u(t)} + v'(t)\ln\big(u(t)\big)\right) u(t)^{v(t)}. \end{aligned}$$

30

• Montrons que $\varphi_{v,p}$ est bien définie au voisinage de 0.

— Cas $v \neq 0$.
Comme U est ouvert, on peut trouver $r > 0$ tel que $D(p,r) \subset U$.
On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| < \frac{r}{\|v\|}$, l'inégalité $\|tv\| < r$.
D'où $p + tv \in D(p,r)$.
Ainsi, $\varphi_{v,p}$ est bien définie sur $\left]-\frac{r}{\|v\|}, \frac{r}{\|v\|}\right[$.

— Si $v = 0$, la fonction $t \mapsto p + tv$ est constante égale à p_0.
Ainsi, $\varphi_{v,p}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Dans tous les cas, la fonction $t \mapsto p + tv$ envoie un intervalle d'intérieur non vide centré en 0, dans U. Ce qui montre que $\varphi_{v,p}$ est définie au voisinage de 0. Notons I un tel voisinage.

• Montrons que $\varphi_{v,p}$ est dérivable en 0.
Notons $p = (a,b)$.
On pose $\Gamma = \Gamma_{v,p} : t \mapsto (a + tx_v, b + ty_v)$ qui est définie sur I à valeurs dans U.
On a $\Gamma(0) = p$.

— γ_1 et γ_2 sont $\mathscr{C}^1$ sur I

— f est $\mathscr{C}^1$ sur U

D'après la première règle de la chaîne, la composée $f \circ \Gamma$ est $\mathscr{C}^1$ sur I, a fortiori dérivable en 0, et on a

$$(f \circ \Gamma)'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big(\Gamma(0)\Big)\gamma_1'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(\Gamma(0)\Big)\gamma_2'(0)$$

$$\varphi_{v,p}'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)x_v + \frac{\partial f}{\partial y}(p)y_v$$

31

Montrons que $F = f \circ \Phi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V.
Autrement dit, que F admet des dérivées partielles en tout point $p \in V$, et que les fonctions dérivées partielles sont continues sur V.

On fixe $p = (a,b) \in V$.
Montrons que F admet une première dérivée partielle en p_0.
Considérons $F_{1,p}$ et montrons que cette fonction, définie sur $D_{1,p}$ est dérivable en a, où $D_{1,p} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x,b) \in V\}$.
Posons $I =]a-r, a+r[$ un voisinage de a inclus dans $D_{1,p}$.
L'application définie sur I

$$\Gamma : x \longmapsto \big(\varphi_{1,p}(x), \psi_{1,p}(x)\big) = \big(\varphi(x,b), \psi(x,b)\big) = \Phi(x,b)$$

est à valeurs dans U.
On a $\Gamma(a) = \Phi(p)$.
La première application partielle de $F = f \circ \Phi : V \to \mathbb{R}$ en p_0 est alors :

$$F_{1,p} : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f\big(\varphi_{1,p}(x), \psi_{1,p}(x)\big), \end{array}$$

c'est-à-dire que l'on a $F_{1,p} = f \circ \Gamma$.
D'après la première règle de la chaîne (vérifier les hypothèses, notamment constater qu'une fonction de deux variables de classe $\mathscr{C}^1$ possède des applications partielles en p_0 de classe $\mathscr{C}^1$), cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée :

$$\begin{aligned} \partial_1(f\circ\Phi)(p) \;=\; F'_{1,p}(a) \;=\; (f\circ\Gamma)'(a) \;&=\; \partial_1 f\big(\Gamma(a)\big)\,\varphi'_{1,p}(a) \;+\; \partial_2 f\big(\Gamma(a)\big)\,\psi'_{1,p}(a) \\ &=\; \partial_1 f\big(\Phi(p)\big)\,\partial_1\varphi(p) \;+\; \partial_2 f\big(\Phi(p)\big)\,\partial_1\psi(p). \end{aligned}$$

On a donc montré l'égalité de fonctions :

$$\partial_1(f\circ\Phi) \;=\; \big(\partial_1 f\circ\Phi\big)\,\partial_1\varphi \;+\; \big(\partial_2 f\circ\Phi\big)\,\partial_1\psi.$$

• Les dérivées partielles étant continues, les composées $\partial_1 f \circ \Phi$ et $\partial_2 f \circ \Phi$ sont continues.
D'où la continuité de $\partial_1(f\circ\Phi)$.

• On procède de même pour la deuxième dérivée partielle, ce qui montre la deuxième formule et la continuité de $\partial_2(f\circ\Phi)$.

• BILAN. la fonction $f\circ\Phi$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

32

— La fonction $\varphi : (u,v) \longmapsto u + uv$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie :

$$\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u}(a,b) = 1+b \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial v}(a,b) = a.$$

— La fonction $\psi : (u,v) \longmapsto u - uv^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie :

$$\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial u}(a,b) = 1-b^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial v}(a,b) = -2ab.$$

D'après la deuxième règle de la chaîne, on en déduit que $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et que, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}(a,b) \;&=\; (1+b)\,\frac{\partial f}{\partial x}(a+ab, a-ab^2) + (1-b^2)\,\frac{\partial f}{\partial y}(a+ab, a-ab^2) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(a,b) \;&=\; a\,\frac{\partial f}{\partial x}(a+ab, a-ab^2) - 2ab\,\frac{\partial f}{\partial y}(a+ab, a-ab^2). \end{aligned}$$

35

Montrons que f admet en $(0,0)$ un maximum local, c'est-à-dire montrons qu'il existe η tel que ...
Posons $\eta = 1$.
Soit $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \cap D\Big((0,0), \eta\Big)$.
Pour alléger, notons $r = \|p\|$. On a donc $r \leqslant \eta = 1$.
On a alors $f(p) = r^4 - r^2$.
Comme $r \leqslant 1$, on a $f(p) \leqslant 0 = f(0,0)$.
Rappel. Au voisinage de 0, on a $t^4 - t^2 \sim -t^2$.

• En revanche, comme $r^4 - r^2 \xrightarrow[r \to +\infty]{} +\infty$, la fonction f n'est pas majorée, donc elle n'admet en particulier pas de maximum global.
Rappel. Au voisinage de $+\infty$, on a $t^4 - t^2 \sim t^4$.

37

IDEE : Via les applications partielles, on se ramène au théorème correspondant pour les fonctions d'une variable.

Supposons que f admette un extremum local en $p = (a, b)$.
L'application partielle $f_{1,p} : t \longmapsto f(t, b)$ admet donc un extremum local en a.
On a vu que le domaine de définition de $f_{1,p}$ contient un intervalle $]a - r, a + r[$ centré en a sur lequel la restriction de $f_{1,p}$ admet donc aussi un extremum local.
Le point a étant intérieur à cet intervalle, le lemme de l'extremum local nous donne $f'_{1,p}(a) = 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = 0$.
En procédant de même avec la deuxième dérivée partielle, on obtient $\frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$.
Ainsi, p_0 est un point critique de f.