

Table des matières

1 Algèbre

Exercice 1 (Annales khass I.1). Montrer que $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ est une bijection.

$$(p, q) \mapsto (2p + 1) 2^q$$

Correction :

- Soient $p, q, k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $F(p, q) = F(k, \ell)$. Alors

$$(2p + 1) 2^q = (2k + 1) 2^\ell.$$

$(\mathbb{N}, \leq)$ étant un ensemble totalement ordonné, on a $\ell \leq q$ ou $q \leq \ell$. Sans perte de généralité, supposons $\ell \leq q$. Alors $(2p + 1) 2^{q-\ell} = 2k + 1$.

Si $q - \ell > 0$, alors $2k + 1$ serait pair, ce qui est absurde ; donc $q = \ell$. Dès lors, $2p + 1 = 2k + 1$ puis $p = k$. Ainsi, F est injective.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$ donc $n = F(k, 0)$.
 - Si n est pair, alors n est un entier ≥ 2 , dont la décomposition en nombre premiers est :

$$n = 2^{\alpha_2} \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \neq 2}} p^{\alpha_p} =: 2^{\alpha_2} N,$$

où N est impair (en tant que produit d'entiers impairs), donc s'écrit sous la forme $N = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$n = (2k + 1) 2^{\alpha_2} = F(k, \alpha_2).$$

Dans tous les cas, on a montré que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ avait au moins un antécédent par F dans $\mathbb{N}^2$ donc F est surjective.

Variante : l'ensemble $A := \{k \in \mathbb{N} ; 2^k | n\}$ est une partie non vide ($0 \in A$) et majorée de $\mathbb{N}$, donc possède un plus grand élément. Notons $q = \max(A)$. Alors $2^q | n$ et $2^{q+1} \nmid n$. Ainsi, $n = 2^q N$, avec N impair donc de la forme $N = 2p + 1$. Ainsi, $n = F(p, q)$.

On en déduit que F est bijective.

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$.

Montrer que f est bijective si, et seulement si, $\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f(C_E^A) = C_F^{f(A)}$.

Correction :

- Supposons f bijective. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

- Soit $y \in f(C_E^A)$. Alors il existe $x \notin A$ tel que $y = f(x)$. Alors, $y \notin f(A)$. En effet, le contraire impliquerait l'existence de $a \in A$ tel que $y = f(a)$, et l'injectivité de f permettrait d'en déduire que $x = a \in A$, ce qui est absurde. Ainsi, $y \in C_F^{f(A)}$, et on a l'inclusion directe.
- Soit $y \in C_F^{f(A)}$. Alors $y \notin f(A)$. Comme $y \in F$ et f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or, $y \notin f(A)$ donc $x \notin A$. Ainsi, $y \in f(C_E^A)$, et on a l'inclusion réciproque.

Ainsi, $f(C_E^A) = C_F^{f(A)}$, ce qui montre l'implication directe.

- Supposons que : $\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f(C_E^A) = C_F^{f(A)}$.

- Montrons que f est surjective. Soit $y \in F$. Fixons $A \in \mathcal{P}(E)$.

* Si $y \in f(A)$, alors y a (au moins) un antécédent dans A .

* Sinon, $y \in C_F^{f(A)} = f(C_E^A)$ par hypothèse, donc y a (au moins) un antécédent dans C_E^A .

Dans tous les cas, tout élément de F a au moins un antécédent dans E donc f est surjective.

Alternative : d'après l'hypothèse appliquée à $A = \emptyset$, on a : $C_E^\emptyset = E$ et $f(\emptyset) = \emptyset$ donc l'hypothèse donne directement : $f(E) = F$, ce qui signifie que f est surjective.

- Montrons que f est injective. Soient $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$.

Posons $A = \{x\}$. Alors $x' \notin A$ i.e. $x' \in C_E^A$ donc $f(x') \in f(C_E^A) = C_F^{\{f(x)\}}$, par hypothèse.

Ainsi, $f(x') \neq f(x)$. Ainsi, par contraposée, f est injective.

Ainsi, f est bijective, ce qui montre le sens indirect.

Exercice 3 (Mines PSI). **Un isomorphisme.** Soient E, F, G et H des espaces vectoriels tels que $E = G \oplus H$. Soit $A = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid G \subset \text{Ker}(u)\}$. Montrer que A est un espace vectoriel isomorphe à $\mathcal{L}(H, F)$.

Trouvons un isomorphisme entre A et $\mathcal{L}(H, F)$. Soit

$\begin{array}{ccc} \Phi : & A & \rightarrow \mathcal{L}(H, F) \\ & u & \mapsto u _H \end{array}$

- A est un ssev de $\mathcal{L}(E, F)$ (le faire !) donc A et $\mathcal{L}(H, F)$ sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $\forall (u, v) \in A^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \Phi(\alpha u + v) = (\alpha u + v)|_H = \alpha u|_H + v|_H = \alpha \Phi(u) + \Phi(v)$. Donc Φ est une application linéaire.
- Soit $u \in \text{Ker}(\Phi)$. Alors $u \in A$ et $u|_H = 0$, donc $G \subset \text{Ker}(u)$ et $H \subset \text{Ker}(u)$. Or, $\text{Ker}(u)$ est un s.e.v. donc stable par somme d'où $E = G + H \subset \text{Ker}(u)$, puis $\text{Ker}(u) = E$ d'où $u = 0$ puis $\text{Ker}(\Phi) \subset \{0\}$. Par ailleurs, $0 \in \text{Ker}(\Phi)$ donc on a l'égalité $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$. Ainsi, Φ est injectif.
- Soit $v \in \mathcal{L}(H, F)$. Comme $E = G \oplus H$, on sait qu'une application linéaire sur E est complètement déterminée par sa restriction à G et à H . Soit donc $u : E = G \oplus H \rightarrow F$, linéaire, telle que $u|_G = 0$ et $u|_H = v$.

En effet, $u : G \oplus H \rightarrow F$ vérifie :

$$g + h \mapsto v(h)$$

- $\forall g \in G, u(g) = u(g + 0) = v(0) = 0$ donc $G \subset \text{Ker}(u)$.
- $\forall h \in H, u(h) = u(0 + h) = v(h)$ donc $u|_H = v$ d'où $\Phi(u) = v$.
- $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $u \in A$ et $\Phi(u) = v$ donc u est un antécédent de v par Φ , d'où Φ est surjectif.

- Conclusion : Φ est un isomorphisme donc A et $\mathcal{L}(H, F)$ sont isomorphes.

Exercice 4 (Annales khass I.6). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim E = 3$. On suppose $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

1. Quel est le rang de f ?
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Indication : On pourra commencer par choisir $e_3 \notin \text{Ker}(f)$.

Correction :

1. $f^2 = 0$ implique que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, donc $\text{rg}(f) \leq \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - \text{rg}(f)$, en utilisant le théorème du rang. Ainsi, $\text{rg}(f) \leq \frac{3}{2}$, et comme $\text{rg}(f) \in \mathbb{N}$, $\text{rg}(f) \in \{0, 1\}$.
Or, f n'est pas l'application nulle donc $\text{rg}(f) \neq 0$. Ainsi, $\text{rg}(f) = 1$.

2. $f \neq 0$ donc il existe $e_3 \in E$ tel que $f(e_3) \neq 0$. Ainsi, $e_3 \notin \text{Ker}(f)$. De plus, $f^2 = 0$ donc $f(e_3) \in \text{Ker}(f)$, où $(f(e_3))$ est une famille libre de $\text{Ker}(f)$. Or, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$, donc d'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_2 \in \text{Ker}(f)$ tel que $(f(e_3), e_2)$ est une base de $\text{Ker}(f)$.

Il reste à vérifier que la famille $(f(e_3), e_2, e_3)$ est une base de E . Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $af(e_3) + be_2 + ce_3 = 0$. En appliquant f , qui est linéaire, on obtient : $0 + 0 + cf(e_3) = 0$. Or, $f(e_3) \neq 0$ par construction, donc $c = 0$. Ainsi, $af(e_3) + be_2 = 0$. La liberté de la famille $(f(e_3), e_2)$ permet d'en déduire que $a = b = 0$. Ainsi, $(f(e_3), e_2, e_3)$ est une famille libre de trois vecteurs de E et E est de di-

mension 3 donc $(f(e_3), e_2, e_3)$ est une base de E . Pour finir, $\text{Mat}_{(f(e_3), e_2, e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\mathcal{B} = (f(e_3), e_2, e_3)$ convient.

Exercice 5 (Annales khass I.10). **Matrices d'Hadamard.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_{i,i} > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

1. Démontrer que A est inversible. **Indication :** Considérer $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $X^T = (x_1 \dots x_n)$, tel que $AX = 0$ et introduire un indice i_0 tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.
2. Montrer que $\det(A) > 0$.

Correction :

1. On sait que A est inversible si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = 0 \Rightarrow X = 0$. Raisonnons par l'absurde : on suppose que A n'est pas inversible ; il existe donc un $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AX = 0$. On note $X^T = (x_1 \dots x_n)$. Comme X est non nul, on choisit un indice $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

- x_{i_0} est non nul ;
- mieux que ça : tel que $|x_{i_0}|$ est maximal.

Plus précisément, soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$|x_{i_0}| = \max \{|x_i| : i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}.$$

On a donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_i| \leq |x_{i_0}|$. Aboutissons maintenant à une contradiction. On sait que $AX = 0$. Donc, sur la ligne i_0 , on obtient que

$$\sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j = 0.$$

On fait passer tous les termes de la somme d'indice $j \neq i_0$ à droite de l'égalité, et on divise par x_{i_0} , qui est non nul par hypothèse. On obtient :

$$a_{i_0,i_0} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n a_{i_0,j} \frac{x_j}{x_{i_0}}.$$

En passant à la valeur absolue et en utilisant que $j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left| \frac{x_j}{x_{i_0}} \right| \leq 1$, on obtient

$$|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0,j}|,$$

ce qui contredit l'énoncé. Ainsi, $AX = 0$ est impossible pour $X \neq 0$. Ainsi, $\text{Ker}(A) = \{0_E\}$ donc A est inversible.

2. Comme $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \det(A) \neq 0$. Considérons $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Il s'agit de montrer
- $$x \mapsto \det(A + xI_n)$$
- que $\det A = f(0) > 0$. Remarquons que f est une fonction polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}_+$, de monôme dominant x^n , donc en particulier, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par hypothèse sur A , la matrice $A + xI_n$ vérifie encore la condition d'Hadamard :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,i} + x \geq a_{i,i} > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|,$$

donc d'après la question 1. appliquée à la matrice $A + xI_n$, $A + xI_n$ est inversible donc $f(x) = \det(A + xI_n) \neq 0$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annule pas sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires, que f est de signe fixe sur $\mathbb{R}_+$. De plus, le fait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ assure que f prend des valeurs positives donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) > 0$. En particulier, en $x = 0$, $\boxed{\det(A) = f(0) > 0}$.

Exercice 6 (Annales khass I.11, TD). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$ et $A + B$ inversible. Montrer que : $\text{rg}A + \text{rg}B = n$.

Correction : D'une part, $AB = 0$ implique que $\text{Im}(B) \subset \text{Ker}(A)$ donc $\text{rg}(B) \leq \dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rg}(A)$, d'après le théorème du rang. Ainsi, $\boxed{\text{rg}(A) + \text{rg}(B) \leq n}$.

D'autre part, $A + B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ implique que $\text{rg}(A + B) = n$. Or, $\text{Im}(A + B) \subset \text{Im}(A) + \text{Im}(B)$ donc $\text{rg}(A + B) \leq \dim(\text{Im}(A) + \text{Im}(B)) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$ (conséquence de la formule de Grassman). Ainsi, $\boxed{\text{rg}(A) + \text{rg}(B) \geq n}$.

Finalement, on a l'égalité : $\boxed{\text{rg}A + \text{rg}B = n}$.

Exercice 7 (Annales khass I.12). Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

1. Exprimer B^2 en fonction de B .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n , qu'on exprimera en fonction de n , tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
3. La relation obtenue à la question précédente est-elle encore valable si n désigne un entier strictement négatif?

Correction :

$$1. B = A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:C} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=:L}.$$

Donc $B^2 = C \underbrace{LC}_{\in \mathbb{R}} L$ et $CL = (1)$ donc $\boxed{B^2 = B}$.

2. $B^2 = B$ donne $A^2 - 2A + I = A - I$ donc $A^2 - 3A + 2I = 0$ donc $\underline{A^2 = 3A - 2I}$.

$\text{Vect}(I, A)$ est stable par produit, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in \text{Vect}(I, A)$ donc il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ (uniques car (I, A) est libre) tel que $\boxed{A^n = a_n A + b_n I}$.

On a $A^0 = I = 0 \times A + 1 \times I$ donc $(a_0, b_0) = (0, 1)$.

On a $A^1 = A = 1 \times A + 0 \times I$ donc $(a_1, b_1) = (1, 0)$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^{n+1} = AA^n$ donc $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$.

Par suite, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ donc (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$, qui se factorise en $(r - 1)(r - 2) = 0$. Par théorème, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \lambda 2^n + \mu 1^n$.

Les conditions initiales donnent $\lambda + \mu = 0$ et $2\lambda + \mu = 1$ donc $\lambda = 1$ et $\mu = -1$.

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2^n - 1}$ et $\boxed{b_n = -2a_{n-1} = 2 - 2^n}$.

3. On a $\frac{3A-A^2}{2} = I$ donc A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{3I-A}{2}$. Ceci permet d'étendre la relation aux entiers négatifs (par récurrence ou calcul direct).

Exercice 8 (Annales khass I.13). Calculer $S_n = \sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k}$, $T_n = \sum_{0 \leq 3k+1 \leq n} \binom{n}{3k+1}$ et $U_n = \sum_{0 \leq 3k+2 \leq n} \binom{n}{3k+2}$.

Indication : on pourra utiliser les polynômes :

$$P_0 = \sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k} X^{3k} \text{ et } P_1 = \sum_{0 \leq 3k+1 \leq n} \binom{n}{3k+1} X^{3k+1} \text{ et } P_2 = \sum_{0 \leq 3k+2 \leq n} \binom{n}{3k+2} X^{3k+2}.$$

Correction : Notons $Q = P_0 + P_1 + P_2 = (1+X)^n$. On a :

$$Q(1) = P_0(1) + P_1(1) + P_2(1) = S_n + T_n + U_n = 2^n$$

$$Q(j) = P_0(j) + P_1(j) + P_2(j) = S_n + jT_n + j^2U_n = (1+j)^n$$

$$Q(j^2) = P_0(j^2) + P_1(j^2) + P_2(j^2) = S_n + j^2T_n + jU_n = (1+j^2)^n, \text{ ce qui fournit un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues.}$$

En sommant les trois équations et comme $1+j+j^2=0$, on obtient :

$$S_n = \frac{1}{3} [2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n], \quad T_n = \frac{1}{3} [2^n + j^2(1+j)^n + j(1+j^2)^n], \quad U_n = \frac{1}{3} [2^n + j(1+j)^n + j^2(1+j^2)^n].$$

Exercice 9 (Annales khass I.7). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $(X^2 + X + 1)^2$ divise le polynôme $(X+1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $P = (X+1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$ et remarquons que $(X^2 + X + 1)^2 = (X-j)^2(X-\bar{j})^2$. Il faut donc montrer que j et $\bar{j}$ sont racines de P de multiplicité au moins 2. Or, $P \in \mathbb{R}[X]$ donc il suffit de montrer que j est racine de P de multiplicité au moins 2. Deux calculs donnent :

$$P(j) = (j+1)^{6n+1} - j^{6n+1} - 1 = (-j^2)^{6n+1} - j^{6n+1} - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$$

et

$$P'(j) = (6n+1)(j+1)^{6n} - (6n+1)j^{6n} = (6n+1)(-j^2)^{6n} - (6n+1) = (6n+1) - (6n+1) = 0.$$

On a : $P(j) = P'(j) = 0$ donc j est racine de P de multiplicité au moins 2.

En conjuguant, il vient : $P(\bar{j}) = P'(\bar{j}) = 0$ donc $\bar{j}$ est racine de P de multiplicité au moins 2.

$j \neq j^2$ implique que : $(X-j)^2(X-\bar{j})^2 | P$ i.e. $(X^2 + X + 1)^2 | P$.

Exercice 10 (Annales khass I.3). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X]$
 $P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Justifier brièvement que f permet de définir un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, exprimer $\deg f(P)$ en fonction de $\deg P$.

3. Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$. Ces deux sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires ?

4. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}_n[X]$ dans laquelle f a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

N.B. : Dans cette matrice carrée, les coefficients en ligne i et colonne $i - 1$ valent 1 et les autres valent 0.

5. Pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, déterminer $\text{Ker } f^k$ et $\text{Im } f^k$. Pour quelles valeurs de $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, a-t-on $\text{Ker } f^k \oplus \text{Im } f^k = \mathbb{C}_n[X]$?

Correction :

1. Il est clair que f est linéaire.

Si $P \in \mathbb{C}_n[X]$, alors $P(X+1) \in \mathbb{C}_n[X]$ et puisque $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par différence $f(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])$.

2. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$. Alors

$$f(P) = \sum_{k=0}^n a_k [(X+1)^k - X^k] = \sum_{k=0}^n a_k \left[\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} X^j - X^k \right] = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j.$$

Si P est constant alors $f(P)$ est nul ; sinon, notons $p = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$. Alors $a_p \neq 0$ et $\forall k \geq p$, $a_k = 0$. On obtient :

$$\begin{aligned} f(P) &= \sum_{k=0}^d a_k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j \\ &= a_d \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j} X^j + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j \\ &= da_d X^{d-1} + Q, \end{aligned}$$

où $Q \in \mathbb{C}_{d-2}[X]$. Or, $da_d \neq 0$ donc $\deg(f(P)) = d - 1$. En conclusion :

$$\deg(f(P)) = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geq 1 \\ -\infty & \text{si } \deg(P) \leq 0. \end{cases}$$

3. • Regardons l'image de la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ par f :

$f(1) = 0$ donc $1 \in \text{Ker}(f)$ et $(f(X), f(X^2), \dots, f(X^n))$ est une famille de n vecteurs non nuls de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, échelonnée en degré donc libre. Ainsi, $\dim(\text{Ker}(f)) \geq 1$ et $\text{rg}(f) \geq n$, mais d'après

le théorème du rang leur somme vaut exactement $n + 1$. Ainsi, $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$, $\text{rg}(f) = n$ et $\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect}(1) = \mathbb{C}_0[X]}$, et $\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(X), f(X^2), \dots, f(X^n)) = \mathbb{C}_{n-1}[X]}$.

- $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \mathbb{C}_0[X] \neq \{0\}$, donc $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ ne sont pas en somme directe, donc pas supplémentaires.

4. L'analyse sur les degrés montre que : $\begin{cases} \deg f^k(X^n) = n - k \text{ si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ f^{n+1}(X^n) = 0. \end{cases}$

Il en résulte que $\mathcal{B} := (X^n, f(X^n), f^2(X^n), \dots, f^n(X^n))$ est une famille libre de $n + 1$ vecteurs de $\mathbb{C}_n[X]$ (vecteurs non nuls et la famille est échelonnée en degré). Or, $\dim(\mathbb{C}_n[X]) = n + 1$ donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X]}$ et $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est de la forme voulue}}.$

5. Soit $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$.

- $\text{Im}(f) = f(\mathbb{C}_n[X]) = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ d'où $\text{Im}(f^2) = f^2(\mathbb{C}_n[X]) = f(\mathbb{C}_{n-1}[X]) = \mathbb{C}_{n-2}[X]$ et par récurrence immédiate : $\boxed{\text{Im}(f^k) = f^k(\mathbb{C}_n[X]) = \begin{cases} \mathbb{C}_{n-k}[X] & \text{si } k \leq n \\ \{0\} & \text{si } k = n + 1. \end{cases}}$

De même, $\text{Ker}(f) = \mathbb{C}_0[X]$, $\text{Ker}(f^2) = \mathbb{C}_1[X]$, $\dots$, $\boxed{\text{Ker}(f^k) = \mathbb{C}_{k-1}[X]}$.

- – Si $k \neq n + 1$, alors $\text{Ker}(f^k) \cap \text{Im}(f^k)$ contient $\mathbb{C}_0[X]$ donc $\text{Ker}(f^k)$ et $\text{Im}(f^k)$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{C}_n[X]$.
- Si $k = n + 1$, alors $\text{Im}(f^{n+1}) = \{0\}$, donc $\text{Ker}(f^{n+1}) \cap \text{Im}(f^{n+1}) = \{0\}$, d'où $\text{Ker}(f^k)$ et $\text{Im}(f^k)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}_n[X]$.

Ainsi, $\boxed{\text{Ker}(f^k) \oplus \text{Im}(f^k) = \mathbb{C}_n[X] \iff k = n + 1}$.

Exercice 11 (Centrale). Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}_+)$ telles que $fg \geq 1$. Montrer que : $\left(\int_0^1 f\right) \times \left(\int_0^1 g\right) \geq 1$.

Correction : Considérons le produit scalaire $(h|p) = \int_0^1 hp$ sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Les fonctions $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$ sont bien définies et continues sur $[0, 1]$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$ donne :

$$\|\sqrt{f}\|^2 \times \|\sqrt{g}\|^2 \geq (\sqrt{f}|\sqrt{g})^2,$$

i.e.

$$\left(\int_0^1 f\right) \times \left(\int_0^1 g\right) \geq \int_0^1 \sqrt{fg}.$$

Or, par hypothèse, fg est minorée par 1 donc $\sqrt{fg}$ aussi (par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$), puis par croissance de l'intégrale sur $[0, 1]$, on obtient $\int_0^1 \sqrt{fg} \geq 1$, donc par transitivité

$$\left(\int_0^1 f\right) \times \left(\int_0^1 g\right) \geq 1.$$

On conclut par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12. Justifier l'existence et calculer le minimum pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$.

- **Première méthode (esprit euclidien) :** On considère le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}[X]$ qui à tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ associe

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

$$\text{Pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2, \int_0^1 (t^2 - (at + b))^2 dt = \|X^2 - (aX + b)\|^2.$$

En notant $F = \text{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$ le ssev de $\mathbb{R}[X]$, on a d'après le cours que le minimum existe et représente le carré de la distance entre X^2 et F :

$$m = \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|X^2 - (aX + b)\|^2 = \min_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \|X^2 - P\|^2 = d(X^2, F)^2 = \|X^2 - p_F(X^2)\|^2.$$

- Vérifions que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
 - * $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement une forme bilinéaire symétrique et positive.
 - * Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ telle que $\langle P, P \rangle = 0$. Alors $\int_0^1 P(t)^2 dt = 0$. Or, $t \mapsto P(t)^2$ est positive et continue donc elle est nulle sur $[0, 1]$. Le polynôme P a donc une infinité de racines sur l'intervalle $[0, 1]$ donc $P = 0$. Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie.

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

- Soit on utilise une BON de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire :
 $(1, X)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$. On peut l'orthonormaliser à l'aide de l'algorithme de Gram-Schmidt en la famille (f_1, f_2) avec :

$$f_1 = 1, \quad f_2 = \sqrt{12} \left(X - \frac{1}{2} \right).$$

Puisque (f_1, f_2) est une BON de F , on a : $p_F(X^2) = (X^2|f_1)f_1 + (X^2|f_2)f_2$ et on en déduit la valeur de $m = \|X^2 - p_F(X^2)\|^2$.

- Soit on utilise les propriétés des orthogonaux et projetés.
 On a : $p_F(X^2) \in F$ donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $p_F(X^2) = aX + b$.

$$\text{De plus, } X^2 - p_F(X^2) \in F^\perp \text{ donc } \begin{cases} (X^2 - p_F(X^2)|1) = 0 \\ (X^2 - p_F(X^2)|X) = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } (p_F(X^2)|1) = (X^2|1) \text{ et } (p_F(X^2)|X) = (X^2|X)$$

$$\text{d'où } (aX + b|1) = (X^2|1) \text{ et } (aX + b|X) = (X^2|X).$$

$$\text{Or, } (1|1) = 1; (1|X) = \frac{1}{2}; (X|X) = \frac{1}{3}; (1|X^2) = \frac{1}{3}; (X|X^2) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Donc } (a, b) \text{ vérifie le système : } \begin{cases} \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

La résolution de ce système donne : $a = 1$ et $b = -\frac{1}{6}$ d'où $p_F(X^2) = X - \frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned} m &= \|X^2 - p_F(X^2)\|^2 = (X^2 - \underbrace{p_F(X^2)}_{\in F} | \underbrace{X^2 - p_F(X^2)}_{\in F^\perp}) = (X^2|X^2 - p_F(X^2)) \\ &= \int_0^1 t^2(t^2 - t + \frac{1}{6})dt = \int_0^1 (t^4 - t^3 + \frac{1}{6}t^2)dt = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{180}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{m = \frac{1}{180}}.$

- **Deuxième méthode (esprit fonction de deux variables) :** Posons pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$g(a, b) = \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt.$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En développant, on obtient :

$$g(a, b) = \int_0^1 (t^4 + a^2 t^2 + b^2 - 2at^3 - 2bt^2 + 2abt) dt.$$

A l'aide d'une primitive, on obtient :

$$g(a, b) = \frac{1}{5} + \frac{a^2}{3} + b^2 - \frac{a}{2} - \frac{2b}{3} + ab.$$

$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que fonction polynomiale de deux variables, et ses dérivées partielles en tout point (a, b) sont :

$$\partial_1 g(a, b) = \frac{2a}{3} - \frac{1}{2} + b \quad \text{et} \quad \partial_2 g(a, b) = 2b - \frac{2}{3} + a.$$

Donc (a, b) est un point critique de g ssi $\begin{cases} \frac{2a}{3} + b = \frac{1}{2} \\ a + 2b = \frac{2}{3} \end{cases}$ ssi $(a, b) = \left(1, -\frac{1}{6}\right).$

De plus, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} g\left(1+h, -\frac{1}{6}+k\right) - g\left(1, -\frac{1}{6}\right) &= \frac{1}{3} \left[(1+h)^2 - 1\right] + \left(-\frac{1}{6}+k\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{h}{2} - \frac{2k}{3} + (1+h) \left(-\frac{1}{6}+k\right) + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3} [2h + h^2] + k \left(k - \frac{1}{3}\right) - \frac{h}{2} - \frac{2k}{3} - \frac{1}{6} + k - \frac{h}{6} + hk + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3} h^2 + k^2 + hk + 0 \times h + 0 \times k \\ &= \left(k + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) h^2 \\ &= \left(k + \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{12} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc g admet un minimum global en $\left(1, -\frac{1}{6}\right)$, qui vaut $\boxed{g\left(1, -\frac{1}{6}\right) = \dots = \frac{1}{5} - \frac{7}{36} = \frac{1}{180}}.$

Exercice 13 (Annales khass I.5). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \mathbb{R}_{2n}[X]$.

1. Pour $(P, Q) \in E_n^2$, on pose $(P|Q) = \sum_{k=-n}^n P(k)Q(k)$. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E_n .
2. Soit $H_n = \left\{ P \in E_n \mid \int_{-1}^1 P(t) dt = 0 \right\}$. Montrer que H_n est un sous-espace vectoriel de E_n ; quelle est sa dimension ? Donner une base de son orthogonal.

3. On prend $n = 1$. Calculer $d(X^2, H_1)$.

Correction :

1. $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est clairement une forme bilinéaire symétrique.

Soit $P \in E_n$. $(P|P) = \sum_{k=-n}^n P(k)^2 \geq 0$, car les carrés réels sont positifs d'où $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est positive.

De plus, si $(P|P) = 0$ alors $\forall k \in \llbracket -n, n \rrbracket$, $P(k) = 0$ d'où P est un polynôme de degré au plus $2n$ qui possède au moins $2n + 1$ racines d'où $P = 0$. Ainsi, $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est définie. On en déduit que $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est un produit scalaire sur E_n .

2. Soit $\varphi : E_n \rightarrow \mathbb{R}$. Alors φ est une forme linéaire non nulle (car $\varphi(1) = 2 \neq 0$) sur E_n et

$$P \mapsto \int_{-1}^1 P$$

$H_n = \text{Ker}(\varphi)$ donc H_n est un hyperplan de E_n . En particulier, H_n est un sous-espace vectoriel de E_n et $\dim(H_n) = \dim(E_n) - 1 = (2n + 1) - 1 = 2n$.

Puisque E_n est de dimension finie, on a $E_n = H_n \oplus H_n^\perp$ donc $H_n^\perp$ est une droite vectorielle, donc il suffit de trouver un vecteur non nul dans $H_n^\perp$.

- On peut remarquer que la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux $2n + 1$ points distincts $-n, -n + 1, \dots, 0, 1, \dots, n$ est une B.O.N. de E_n pour ce produit scalaire.

En effet, pour tout $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$, on a $L_k = \frac{\prod_{j \neq k}(X - j)}{\prod_{j \neq k}(k - j)}$. Classiquement, $(L_k)_{-n \leq k \leq n}$ est une famille libre (revenir à la définition de la liberté) de $2n + 1$ polynômes de E_n (qui est un $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension $2n + 1$), donc $(L_k)_{-n \leq k \leq n}$ est une base de E_n . De plus, pour tout $(p, q) \in$

$\llbracket -n, n \rrbracket$, on a $(L_p|L_q) = \sum_{k=-n}^n \underbrace{L_p(k) L_q(k)}_{=\delta_{p,k}} = L_q(p) = \delta_{p,q}$, donc $(L_k)_{-n \leq k \leq n}$ est une famille orthonormale.

- Soit $P \in E_n$. Alors $P = \sum_{k=-n}^n P(k)L_k$. Par linéarité de φ , on a $\varphi(P) = \sum_{k=-n}^n P(k)\varphi(L_k)$.

Posons alors $Q = \sum_{k=-n}^n \varphi(L_k)L_k \in E_n$. Puisque (L_k) est une B.O.N. de E_n , on a

$$(P|Q) = \sum_{k=-n}^n P(k)\varphi(L_k) = \varphi(P).$$

Ainsi,

$$H_n = \{P \in E_n \mid \varphi(P) = 0\} = \{P \in E_n \mid (P|Q) = 0\} = Q^\perp.$$

Donc $Q \in H_n^\perp$, et $Q \neq 0$ (sinon, H_n serait égal à E_n et ne serait pas un hyperplan de E_n), d'où $H_n^\perp = \text{Vect}(Q)$.

3. Pour $n = 1$, $E_1 = \mathbb{R}_2[X]$ et $H_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \int_{-1}^1 P = 1\} = \{aX^2 + bX - \frac{a}{3} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ est bien un hyperplan de E_1 , et $H_1^\perp = \text{Vect}(Q)$ où

$$Q = \varphi(-1)L_{-1} + \varphi(0)L_0 + \varphi(1)L_1,$$

et

$$\begin{aligned} L_{-1} &= \frac{(X-0)(X-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}X(X-1) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X, \\ L_0 &= \frac{(X-1)(X+1)}{(0-1)(0+1)} = (1-X)(X+1) = -X^2 + 1, \\ L_1 &= \frac{(X-0)(X+1)}{(1-0)(1+1)} = \frac{1}{2}X(X+1) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X. \end{aligned}$$

Or,

$$d(X^2, H_1) = \|p_{H_1^\perp}(X^2)\| = (X^2 | \frac{Q}{\|Q\|}) = \frac{1}{\|Q\|} (X^2 | Q),$$

car $(\frac{Q}{\|Q\|})$ est une B.O.N. de $H_1^\perp$. On a aussi $X^2 = (-1)^2 L_{-1} + 0^2 L_0 + 1^2 L_1$ et (L_{-1}, L_0, L_1) est une B.O.N. de E_1 donc

$$(X^2 | Q) = (-1)^2 \varphi(L_{-1}) + 0^2 \varphi(L_0) + 1^2 \varphi(L_1) = \varphi(L_{-1}) + \varphi(L_1).$$

Un calcul donne :

$$\begin{aligned} \varphi(L_{-1}) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 - x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = \varphi(L_1) \\ \varphi(L_0) &= \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

On en déduit que : $\|Q\| = \sqrt{\varphi(L_{-1})^2 + \varphi(L_0)^2 + \varphi(L_1)^2} = \sqrt{\frac{18}{9}} = \sqrt{2}$, et $(X^2 | Q) = \frac{2}{3}$ donc

$$d(X^2, H_1) = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Exercice 14 (Annales khass I.2). Soit $(a_1, \dots, a_n, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Calculer $\det \begin{pmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ x & x+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \dots & x & x+a_n \end{pmatrix}$.

Correction : Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). On

cherche $D = \det(X + a_1 \varepsilon_1, X + a_2 \varepsilon_2, \dots, X + a_n \varepsilon_n)$.

Le caractère alterné du déterminant montre que, quand on développe l'expression ci-dessus par linéarité par rapport à chaque colonne, les termes s'annulent dès que deux colonnes au moins sont égales à X . Il

reste donc :

$$D = \det(a_1\varepsilon_1, \dots, a_n\varepsilon_n) + \det(X, a_2\varepsilon_2, \dots, a_n\varepsilon_n) + \det(a_1\varepsilon_1, X, \dots, a_n\varepsilon_n) + \dots + \det(a_1\varepsilon_1, \dots, a_{n-1}\varepsilon_{n-1}, X)$$

$$= a_1 \dots a_n + \sum_{k=1}^n x \prod_{i \neq k} a_i.$$

Remarque : $D = \sigma_n + x\sigma_{n-1}$ (fonction symétriques élémentaires)

Exercice 15 (Annales khass I.8). On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.

Soit u_1, u_2, u_3 trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, P la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par : $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, f(e_i) = u_i$.

Soit enfin le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) & (u_1|u_3) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) & (u_2|u_3) \\ (u_3|u_1) & (u_3|u_2) & (u_3|u_3) \end{vmatrix}$.

1. Exprimer Δ à l'aide de $\det(P)$.
2. Montrer que $\Delta \geq 0$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\Delta = 0$.
4. On suppose (u_1, u_2) libre et on pose $d = d(u_3, \text{Vect}(u_1, u_2))$.

Montrer que $d^2 = \frac{\Delta}{\delta}$, où $\delta = \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) \end{vmatrix}$.

Correction : Notons $M(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) & (u_1|u_3) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) & (u_2|u_3) \\ (u_3|u_1) & (u_3|u_2) & (u_3|u_3) \end{pmatrix}$.

1. Pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, notons C_i est le vecteur coordonnée de $f(e_i) = u_i$ dans la BON $\mathcal{B}$ donc

$$(u_i|u_j) = C_i^T C_j.$$

Par définitions, on a

$$P = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3),$$

et

$$M(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} P^T C_1 & P^T C_2 & P^T C_3 \end{pmatrix} = P^T P.$$

Ainsi,

$$\Delta = \det(P^T P) = \det(P^T) \det P = (\det P)^2.$$

2. On a : $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc $\det P \in \mathbb{R}$ et $\Delta = (\det P)^2 \in \mathbb{R}_+$.
3. On a : $\Delta = 0 \iff \det P = 0 \iff P \notin \text{GL}_3(\mathbb{R}) \iff \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = 0 \iff (u_1, u_2, u_3)$ liée.

4. On note $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$, et x le projeté orthogonal de u_3 sur F . On a

$$d = d(u_3, F) = \|u_3 - x\|.$$

On écrit :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) & (u_1|x + (u_3 - x)) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) & (u_2|x + (u_3 - x)) \\ (u_3|u_1) & (u_3|u_2) & (u_3|x + (u_3 - x)) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) & (u_1|x) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) & (u_2|x) \\ (u_3|u_1) & (u_3|u_2) & (u_3|x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) & \underbrace{(u_1|u_3 - x)}_{=0} \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) & \underbrace{(u_2|u_3 - x)}_{=0} \\ (u_3|u_1) & (u_3|u_2) & \underbrace{(u_3|u_3 - x)}_{=(u_3-x|u_3-x)=\|u_3-x\|^2} \end{vmatrix} && \text{(linéarité 3ème colonne)} \\ &= \underbrace{\det(M(u_1, u_2, x))}_{=0 \text{ car } (u_1, u_2, x) \text{ est liée}} + \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) & 0 \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) & 0 \\ (u_3|u_1) & (u_3|u_2) & \|u_3 - x\|^2 \end{vmatrix} \\ &= 0 + \|u_3 - x\|^2 \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) \end{vmatrix} && \text{(dvpt p.r. à la 3ème colonne)} \\ &= d^2 \delta. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de justifier que $\delta \neq 0$, ce qui est le cas puisque (u_1, u_2) est libre (même argument que dans la question 3.). Ainsi, $d^2 = \frac{\Delta}{\delta}$.

Exercice 16 (Annales khass I.9). Soient A et B deux matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- $AB = BA$;
 - B est nilpotente (c'est-à-dire il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $B^p = 0$).
1. Montrer que si A est inversible, alors $A + B$ est inversible.
 2. Montrer que si A est inversible, alors $\det(A + B) = \det A$.
 3. Si A n'est pas inversible, a-t-on encore $\det(A + B) = \det A$?

Correction :

1. cf TD. Supposons A inversible. Alors on écrit : $A + B = A(I + A^{-1}B)$ et il n'y a plus qu'à montrer que $I + A^{-1}B$ est inversible. Or, cette matrice est de la forme $I + N$ avec N une matrice nilpotente (car A^{-1} et B commutent et B est nilpotente). Classiquement, $I + N$ est inversible d'inverse $1 - N + N^2 - N^3 + \dots + (-1)^{p-1}N^{p-1}$.
2. Supposons A inversible.
On écrit encore $A + B = A(I + A^{-1}B)$. Alors $\det(A + B) = \det(A) \det(I + A^{-1}B)$, donc il suffit de montrer que $\det(I + A^{-1}B) = 1$. Montrons que pour toute matrice nilpotente N , on a $\det(I + N) = 1$. Pour cela, on va montrer le lemme : si N est nilpotente, alors N est semblable à

une matrice triangulaire supérieure stricte. Supposons ce lemme acquis, alors il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$

tel que $P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & (*) \\ & \ddots \\ (0) & 0 \end{pmatrix}$. Donc $P^{-1}(I+N)P = \begin{pmatrix} 1 & (*) \\ & \ddots \\ (0) & 1 \end{pmatrix}$, qui est de déterminant

1. Ainsi, $\det(I+N) = 1$, ce qui conclura.

Montrons le lemme, par récurrence sur la taille de N .

- Si $N \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $N = (0)$ et on a l'initialisation.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$

tel que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & (*) \\ & \ddots \\ (0) & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $N \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ nilpotente. Considérons l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^{n+1}$ canoniquement associé à N . Alors u n'est pas injectif (car endomorphisme nilpotent en dimension finie). Soit donc $e_1 \in \text{Ker } u \setminus \{0\}$. La famille (e_1) est donc une famille libre de $\mathbb{K}^{n+1}$, que l'on complète en une base $\mathcal{C} = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$. En notant $P_1 \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{C}$, on a

$$N' := P_1^{-1}NP_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{array} \right), \text{ avec } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Par produit par blocs, on obtient facilement que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, (N')^k = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M^k & \\ 0 & & & \end{array} \right),$$

ce qui assure que M est nilpotente.

Par hypothèse de récurrence, il existe donc $P_2 \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$P_2^{-1}MP_2 = \begin{pmatrix} 0 & (*) \\ & \ddots \\ (0) & 0 \end{pmatrix} =: T.$$

Posons $Q = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_2 & \\ 0 & & & \end{array} \right)$. Alors $Q \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ (évident grâce au rang ou au dé-

terminant) et $Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_2^{-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right)$, puis $Q^{-1}N'Q = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_2^{-1}MP_2 = T & \\ 0 & & & \end{array} \right)$ est

triangulaire supérieure stricte. D'où l'hérédité, ce qui conclut la récurrence et prouve le lemme.

3. Supposons A non inversible. Alors $A + B$ n'est pas inversible (sinon, $A = (A + B) + (-B)$ le serait d'après 1.). Donc $\det(A + B) = 0 = \det(A)$. La réponse est donc oui : pour A et B deux matrices carrées qui commutent, avec B nilpotente, on a $\det(A + B) = \det A$.

Alternative : sauf pour un nombre fini de $x \in \mathbb{K}$, $A + xI$ est inversible (car $x \mapsto \det(A + xI)$ est polynomiale) donc $\det(A + xI + B) = \det(A + xI)$, d'après ce qui précède.

Les fonctions $x \mapsto \det(A + xI + B)$ et $x \mapsto \det(A + xI)$ sont polynomiales et coïncident sur un nombre infini de points, donc sont égales ! En particulier, pour $x = 0$, on a $\det(A + B) = \det(A)$.

2 Analyse

Exercice 17. En utilisant les éléments de $\mathbb{U}_7$, exhiber une équation de degré 3 dont $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est solution.

Correction : Posons $\zeta_7 = e^{i\frac{2\pi}{7}} = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.

On a

$$\mathbb{U}_7 = \left\{1, \zeta_7, \zeta_7^2, \zeta_7^3, \zeta_7^4, \zeta_7^5, \zeta_7^6\right\} = \left\{1, \zeta_7, \zeta_7^2, \zeta_7^3, \overline{\zeta_7^3}, \overline{\zeta_7^2}, \overline{\zeta_7}\right\}.$$

Classiquement, la somme des éléments de $\mathbb{U}_7$ vaut 0, donc

$$0 = 1 + (\zeta_7 + \overline{\zeta_7}) + (\zeta_7^2 + \overline{\zeta_7^2}) + (\zeta_7^3 + \overline{\zeta_7^3}) = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right). \quad (*)$$

La formule de doublement de l'angle donne $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$. On a aussi :

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \operatorname{Re}(e^{3i\theta}) = \operatorname{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^3) \\ &= \operatorname{Re}(\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta) \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1 - \cos^2\theta) \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta. \end{aligned}$$

En posant $x = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$, on obtient $\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) = 2x^2 - 1$ et $\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = 4x^3 - 3x$, puis en reportant dans (*) :

$$1 + 2x + 2(2x^2 - 1) + 2(4x^3 - 3x) = 0,$$

donc $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est solution de l'équation de degré 3 : $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$.

Exercice 18. 1. Déterminer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sin t}$ sur $]0, \pi[$.

Indication : On pourra utiliser l'angle moitié.

2. Résoudre sur $]0, \pi[$ l'équation différentielle

$$\sin(t)y' + y = t\sin(t)(1 + \cos(t)).$$

Correction :

1. Soit $t \in]0, \pi[$. Alors $\frac{t}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos\frac{t}{2} > 0$ et $\tan\frac{t}{2}$ est bien défini.

Par factorisation par l'angle moitié, on obtient : $\sin(t) = \frac{2\tan\frac{t}{2}}{1 + \tan^2\frac{t}{2}}$ donc

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1 + \tan^2\frac{t}{2}}{2\tan\frac{t}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(1 + \tan^2\frac{t}{2})}{\tan\frac{t}{2}} = \frac{u'(t)}{u(t)}, \text{ avec } u : t \mapsto \tan\frac{t}{2}.$$

Ainsi, $t \mapsto \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sin t}$.

2. • $\sin$ ne s'annule pas sur $]0, \pi[$ donc il faut résoudre l'équation (E) : $y' + \underbrace{\frac{1}{\sin t}}_{=:a(t)} y = \underbrace{t(1 + \cos t)}_{=:b(t)}$.

• Résolution de l'équation homogène (H) : $y' + \underbrace{\frac{1}{\sin t}}_{=:a(t)} y = 0$.

$A : t \mapsto \ln \left(\tan \frac{t}{2} \right) = -\ln \left(\frac{1}{\tan \frac{t}{2}} \right)$ est une primitive de a donc

$$S(H) = \{t \mapsto \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{ \left(t \mapsto \frac{\lambda}{\tan \frac{t}{2}} \right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

• Trouvons une solution particulière de l'équation de départ : on utilise la méthode de la variation de la constante (λ). On a :

$$\begin{aligned} \forall t, y_P(t) = \lambda(t)e^{-A(t)} \in S(E) &\Leftrightarrow \forall t, y'_P(t) + a(t)y_P(t) = b(t) \Leftrightarrow \forall t, \lambda'(t)e^{-A(t)} = b(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t, \lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}. \end{aligned}$$

Il faut donc choisir une fonction λ telle que pour tout $t \in]0, \pi[$, $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$.

– Calculons $\int b e^A$. Soit $t \in]0, \pi[$.

$$\begin{aligned} \int_0^t b e^A &= \int_0^t x(1 + \cos x) \tan \frac{x}{2} dx = \int_0^t x \times 2 \cos^2 \frac{x}{2} \times \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx = \int_0^t 2x \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} dx \\ &= \int_0^t x \sin x dx. \end{aligned}$$

$$\text{Une IPP donne : } \int_0^t x \sin x dx = -t \cos t + \sin t.$$

– Dès lors, $y_P : t \mapsto (\sin t - t \cos t) \frac{1}{\tan \frac{t}{2}}$ est une solution particulière de (E).

• Finalement : $S(E) = \left\{ t \mapsto \frac{\sin t - t \cos t + \lambda}{\tan \frac{t}{2}}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 19. Formule de Taylor-Lagrange. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

- f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n sur $[a, b]$;
- $f^{(n)}$ est continue sur $[a, b]$;
- $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$.

Montrer qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + (b-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Le terme $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ est appelé **reste de Lagrange**.

Correction : Méthode 1 : Soit A le nombre réel défini par :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}A,$$

et φ l'application définie sur $[a, b]$ par :

$$\varphi : x \mapsto f(b) - \left[f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}A \right].$$

Il est clair que φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et vérifie $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or le calcul de φ' donne, par télescopage :

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} \left[A - f^{(n+1)}(x) \right].$$

Pour $x = c$, et sachant que $\frac{(b-c)^n}{n!} \neq 0$, on obtient $\boxed{A = f^{(n+1)}(c)}$, ce qui conclut.

Méthode 2 : Soit $\psi : x \mapsto f(x) - \left[f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}B \right]$, définie sur $[a, b]$.

ψ est donc $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$ et pour tout $x \in]a, b[$,

$$\psi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) - B(x-a) \quad \text{et} \quad \psi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - B.$$

Tout d'abord, $\psi(a) = 0$. On pose B tel que $\psi(b) = 0$. Dès lors, $\psi(a) = \psi(b)$. De plus, ψ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de Rolle appliqué à ψ , il existe $b_1 \in]a, b[$ tel que $\psi'(b_1) = 0$.

Mais $\psi'(a) = 0 = \psi'(b_1)$, et en appliquant le théorème de Rolle à ψ' , on obtient l'existence de $b_2 \in]a, b_1[$ tel que $\psi''(b_2) = 0$.

En itérant, on construit $b_1, \dots, b_n$ tels que $a < b_n < \cdots < b_2 < b_1 < b$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\psi^{(k)}(b_k) = 0$. En particulier, $\psi^{(n)}(b_n) = 0$.

Dès lors, $\psi^{(n)}(a) = \psi^{(n)}(b_n)$, $\psi^{(n)}$ est continue sur $[a, b_n]$, dérivable sur $]a, b_n[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de Rolle appliqué à $\psi^{(n)}$, il existe $c \in]a, b_n[$ tel que $\psi^{(n+1)}(c) = 0$.

On a donc

$$f^{(n+1)}(c) = B, \quad \text{et } B \text{ tel que } \psi(b) = 0,$$

ce qui conclut.

Remarque : pour $n = 0$, on retrouve l'égalité des accroissements finis.

Exercice 20 (Annales khass II.1). Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $\varphi(n, p) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n} \right)^{1/p} \right)^p$.

1. Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $v_p := \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n, p)$, puis $\lim_{p \rightarrow +\infty} v_p$.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n := \lim_{p \rightarrow +\infty} \varphi(n, p)$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

Correction :

1. • Fixons $p \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît une somme de Riemann, où $x \mapsto (1+x)^{1/p} \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n} \right)^{1/p} = \int_0^1 (1+x)^{1/p} dx = \left[\frac{p}{p+1} (1+x)^{\frac{1}{p}+1} \right]_0^1 = \frac{p}{p+1} \left(2^{\frac{p+1}{p}} - 1 \right).$$

Ainsi,

$$v_p = \left[\frac{p}{p+1} \left(2^{\frac{p+1}{p}} - 1 \right) \right]^p.$$

- Posons $u = \frac{1}{p}$. Alors par composition de limites :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} v_p = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+u} (2^{1+u} - 1) \right)^{1/u} = \lim_{u \rightarrow 0} \exp \left(\frac{1}{u} \ln \left(\frac{1}{1+u} (2^{1+u} - 1) \right) \right).$$

Or, $\frac{1}{1+u} = 1 - u + o(u)$ et

$$\begin{aligned} 2^{1+u} - 1 &= 2 \times 2^u - 1 = 2e^{(\ln 2)u} - 1 = 2(1 + (\ln 2)u + o(u)) - 1 \\ &= 1 + (\ln 4)u + o(u). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{1+u} (2^{1+u} - 1) = 1 + \underbrace{(\ln(4) - 1)u + o(u)}_{\rightarrow 0},$$

d'où

$$\ln \left(\frac{1}{1+u} (2^{1+u} - 1) \right) = (\ln(4) - 1)u + o(u), \quad \text{et} \quad \frac{1}{u} \ln \left(\frac{1}{1+u} (2^{1+u} - 1) \right) = \ln(4) - 1 + o(1).$$

Ainsi, $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \ln \left(\frac{1}{1+u} (2^{1+u} - 1) \right) = \ln(4) - 1$, puis par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} v_p = \lim_{y \rightarrow \ln(4) - 1} e^y = e^{\ln(4) - 1} = \frac{4}{e}.$$

2. • Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

$$w_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} \exp \left[p \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n} \right)^{1/p} \right) \right].$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \left(1 + \frac{k}{n} \right)^{1/p} = \exp \left[\frac{1}{p} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right] = 1 + \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \frac{1}{p} + \underset{p \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{p} \right).$$

D'où

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{1/p} = 1 + \frac{1}{p} \times \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right)}_{=: s_n} + \underset{p \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{p}\right) = 1 + \underbrace{s_n \frac{1}{p} + \underset{p \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{p}\right)}_{\rightarrow 0}.$$

Ainsi,

$$p \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{1/p} \right) = s_n + \underset{p \rightarrow +\infty}{o}(1).$$

Finalement, par continuité de l'exponentielle :

$$w_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} \exp \left[p \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{1/p} \right) \right] = \lim_{y \rightarrow s_n} e^y = e^{s_n},$$

donc

$$w_n = \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right).$$

- Par ailleurs, en reconnaissant encore une somme de Riemann, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) &= \int_0^1 \ln(1+x) dx = \int_0^1 1 \times \ln(1+x) dx \\ &= [(1+x) \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 1 dx \quad (\text{par intégration par parties}) \\ &= 2 \ln(2) - 1 = \ln(4) - 1. \end{aligned}$$

D'où, par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \exp(\ln(4) - 1) = \frac{4}{e}.$$

Exercice 21 (Annales khass II.2). Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Déterminer les couples (x, y) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) + \sin(\omega t) \\ y'(t) = x(t) - \cos(\omega t). \end{cases} \quad (*)$$

Correction : Procédons par analyse-synthèse.

Soient x et y des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $z : t \mapsto x(t) + iy(t)$. Alors z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Si (x, y) est solution de $(*)$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} z'(t) &= x'(t) + iy'(t) = -y(t) + \sin(\omega t) + i(x(t) - \cos(\omega t)) \\ &= i[x(t) + iy(t)] - i[\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] \\ &= iz(t) - ie^{i\omega t}, \end{aligned}$$

donc z est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et second membre

exponentiel :

$$\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) - iz(t) = -ie^{i\omega t} \quad (E)$$

- L'équation homogène associée est : $z'(t) - iz(t) = 0$ de solutions $t \mapsto Ce^{it}$, avec $C \in \mathbb{C}$.
- Déterminons une solution particulière.

Première méthode (cas favorable). L'équation caractéristique associée est $r - i = 0$ de racine i , et $i\omega = i \iff \omega = 1$.

- Cas où $\omega \neq 1$. On cherche une solution particulière de la forme $t \mapsto Ae^{i\omega t}$ et on trouve (après calculs) $A = \frac{1}{1-\omega} \in \mathbb{R}$ donc $t \mapsto \frac{e^{i\omega t}}{1-\omega}$ est solution particulière de (E) et les solutions de (E) sont les

$$z : t \mapsto Ce^{it} + \frac{1}{1-\omega}e^{i\omega t}, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Par unicité des fonctions parties réelles et imaginaires de z (en écrivant $C = a + ib \in \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ et comme $\omega \in \mathbb{R}$), on a

$$\boxed{x : t \mapsto a \cos t - b \sin t + \frac{1}{1-\omega} \cos(\omega t)} \quad \text{et} \quad \boxed{y : t \mapsto a \sin t + b \cos t + \frac{1}{1-\omega} \sin(\omega t)}.$$

Réciproquement, un calcul de dérivée permet de vérifier que ces couples de fonctions sont bien solutions de (*).

- Cas où $\omega = 1$. On cherche une solution particulière de la forme $t \mapsto Bte^{it}$ et on trouve (après calculs) $B = -i$ donc $t \mapsto -ite^{it}$ est solution particulière de (E) et les solutions de (E) sont les

$$z : t \mapsto (C - it)e^{it}, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Par unicité des fonctions parties réelles et imaginaires de z (en écrivant $C = a + ib \in \mathbb{R} + i\mathbb{R}$), on a

$$\boxed{x : t \mapsto a \cos t + (t - b) \sin t} \quad \text{et} \quad \boxed{y : t \mapsto (b - t) \cos t + a \sin t}.$$

Réciproquement, un calcul de dérivée permet de vérifier que ces couples de fonctions sont bien solutions de (*).

Deuxième méthode (variation de la constante). Soit C une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $z : t \mapsto C(t)e^{it}$. Un calcul donne $z' - iz : t \mapsto C'(t)e^{it}$. Donc z est solution de (E) ssi $\forall t \in \mathbb{R}, C'(t)e^{it} = -ie^{i\omega t}$ ssi $\forall t \in \mathbb{R}, C'(t) = -ie^{i(\omega-1)t}$. Distinguons les cas.

- Cas où $\omega \neq 1$. On pose $C : t \mapsto \frac{-i}{i(\omega-1)}e^{i(\omega-1)t} = \frac{e^{i(\omega-1)t}}{1-\omega}$ donc $\boxed{z : t \mapsto \frac{e^{i\omega t}}{1-\omega} \text{ est solution de (E)}}$.
- Cas où $\omega = 1$. Alors $C' = -i$ donc on pose $C : t \mapsto -it$ et $\boxed{z : t \mapsto -ite^{it} \text{ est solution de (E)}}$.

On conclut comme avec l'autre méthode.

Exercice 22 (Annales khass II.3). Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels > 0 vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que la série de terme général u_n converge.

Indication : On pourra considérer la suite de terme général $w_n = \ln(n^{b-a}u_n)$. On suppose désormais que (a, b) vérifie cette condition.

2. Montrer que $nu_n \rightarrow 0$.

3. Calculer la somme de la série de terme général u_n .

Correction :

1. Posons $w_n = \ln(n^{b-a}u_n)$. On sait que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge ssi la série $\sum(w_{n+1} - w_n)$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \ln((n+1)^{b-a}u_{n+1}) - \ln(n^{b-a}u_n) \\ &= (b-a) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{\frac{u_{n+1}}{u_n}}{\frac{n+a}{n+b} = \frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{b}{n}}}\right) \\ &= (b-a) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{b}{n}\right) \\ &= (b-a) \left[\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + \frac{a}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{b}{n} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{b-a}{n} + \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

$\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une SATP convergente (série de Riemann), donc par théorème de comparaison, $\sum(w_{n+1} - w_n)$ est absolument convergente, donc convergente, et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, vers

un réel noté λ . Par continuité de $\exp$, $n^{b-a}u_n \rightarrow e^\lambda \neq 0$ donc $u_n \sim \frac{e^\lambda}{n^{b-a}}$.

On en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang et $\sum u_n$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{b-a}}$ (par théorème de comparaison des SATP).

Connaissant les cas de convergence des séries de Riemann, on en déduit

$$\sum u_n \text{ converge} \iff b - a > 1.$$

On suppose désormais que $b - a > 1$.

2. On a $nu_n \sim \frac{e^\lambda}{n^{b-a-1}}$ avec $b-a-1 > 0$, donc $\frac{e^\lambda}{n^{b-a-1}} \rightarrow 0$ et par conservation de la limite dans les équivalents, $\boxed{nu_n \rightarrow 0}$.

3. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+b)u_{n+1} = (n+a)u_n$
 donc $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)u_{n+1} - nu_n + (b-1)u_{n+1} - au_n = 0$
 donc $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)u_{n+1} - nu_n + (b-1)(u_{n+1} - u_n) + (b-1-a)u_n = 0$.
 En sommant pour n de 0 à N , on obtient par télescopage :

$$\underbrace{(N+1)u_{N+1} - 0u_0}_{\rightarrow 0 \text{ d'après 2.}} + (b-1) \underbrace{u_{N+1} - u_0}_{\rightarrow 0} + (b-1-a) \sum_{n=0}^N u_n.$$

On a $u_N \rightarrow 0$ (terme général d'une série convergente) donc en passant à la limite quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{(b-1)u_0}{b-a-1}}.$$

Exercice 23 (Annales khass II.4). Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

- Démontrer que pour tout $f \in E$, et pour tout $x \in [0, 1]$, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(x) = f''(c) \frac{x(x-1)}{2}$.
- Montrer qu'il existe $M > 0$, que l'on déterminera, tel que : $\forall f \in E, \int_0^1 |f| \leq M \sup_{[0,1]} |f''|$. Déterminer la meilleure valeur de M .

Correction :

- Soient $f \in E$ et $x \in [0, 1]$.
 Si $x = 0$ ou $x = 1$ n'importe quel c convient.
 Supposons maintenant que $x \in]0, 1[$. On peut trouver $A \in \mathbb{R}$ tel que la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t) - A \frac{t(t-1)}{2} \end{aligned}$$

s'annule en x (prendre $A = \frac{2f(x)}{x(x-1)}$, qui est bien défini car $x \in]0, 1[$). La fonction φ est donc de classe $\mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ et s'annule en 0, x et 1 et on a $0 < x < 1$. Par application du théorème de Rolle sur $[0, x]$ et sur $[x, 1]$, on obtient l'existence de $a \in]0, x[$ et $b \in]x, 1[$ tels que $\varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$. En appliquant encore le théorème de Rolle à $\varphi' \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, on obtient : $\exists c \in]a, b[\mid \varphi''(c) = 0$. Or, $\varphi'' = f'' - A$ donc $\boxed{\exists c \in]a, b[\subset]0, 1[: f''(c) = A = \frac{2f(x)}{x(x-1)}}$.

- Soit $f \in E$. D'après la question 1., pour tout $x \in [0, 1]$, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(x) = f''(c) \frac{x(x-1)}{2}$. De plus, $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ donc $f'' \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ donc $\sup |f''|$ existe dans $\mathbb{R}$ et on le notera $\|f''\|_\infty$. Ainsi,

$$\forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq \frac{x(1-x)}{2} \|f''\|_\infty,$$

puis par croissance de l'intégrale sur $[0, 1]$,

$$\int_0^1 |f| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2} \int_0^1 x(1-x)dx = \frac{\|f''\|_\infty}{2} \int_0^1 (x-x^2)dx = \frac{\|f''\|_\infty}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\|f''\|_\infty}{12}.$$

$$M = \frac{1}{12} \text{ convient.}$$

C'est même la meilleure valeur possible pour M , car cette borne est atteinte pour la fonction $g : x \mapsto \frac{x(1-x)}{2}$. En effet, $g \in E$, $\int_0^1 |g| = \frac{1}{12}$, $g'' : x \mapsto -1$ donc $\|g''\|_\infty = 1$.

Exercice 24 (Annales khass II.5). 1. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right). \text{ Montrer que } u_n \rightarrow f'(0)/2.$$

2. On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^1$, que $f(0) = 0$ et que $f''(0)$ existe. Montrer que $u_n \rightarrow f'(0)/2$.

3. Soient f comme en 2. et $g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)g\left(\frac{k}{n}\right)$. Déterminer la limite de (v_n) .

Correction :

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $1 \leq k \leq n \leq n^2$ donc $0 \leq \frac{k}{n^2} \leq 1$. Puisque $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $f(0) = 0$, on sait d'après le TAF qu'il existe $x_{k,n} \in]0, \frac{k}{n^2}[$ tel que

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f(0) = \frac{k}{n^2} f'(x_{k,n}).$$

Ainsi, $f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{k}{n^2} f'(x_{k,n})$ donc

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f'(x_{k,n}).$$

Étudions la suite $\left(u_n - f'(0) \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \left|u_n - f'(0) \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}\right| &= \left|\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} [f'(x_{k,n}) - f'(0)]\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} |f'(x_{k,n}) - f'(0)| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} x_{k,n} \|f''\|_\infty && \text{d'après l'I.A.F. appliquée à } f' \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})^* \\ &\leq \|f''\|_\infty \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2}\right)^2 && \text{car } 0 \leq x_{k,n} \leq \frac{k}{n^2} \\ &\leq \|f''\|_\infty \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4}. \end{aligned}$$

En effet, $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ donc $f' \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et f'' est continue sur le segment $[0, 1]$ donc bornée par le réel $\|f''\|_\infty$. D'après l'I.A.F., on a pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|f'(x_{k,n}) - f'(0)| \leq \|f''\|_\infty x_{k,n}$.

Puisque $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} \rightarrow 0$, on a par théorème d'encadrement que

$$u_n - f'(0) \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'où, par opération sur les suites convergentes, on conclut que :

$$u_n = \underbrace{\left(u_n - f'(0) \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \right)}_{\rightarrow 0} + f'(0) \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \right)}_{\substack{= \frac{n(n+1)}{2n^2} \rightarrow 1/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f'(0)}{2}.$$

2. L'hypothèse $f''(0)$ existe signifie que f' est dérivable en 0. Ainsi, f' admet un DL à l'ordre 1 en 0 :

$$f'(x) = f'(0) + f''(0)x + o(x).$$

Puisque f est dérivable sur l'intervalle $[0, 1]$, on a par théorème de primitivation des DL que f admet un DL à l'ordre 2 en 0 donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + o(x^2).$$

Puisque $f(0) = 0$, on a

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f\left(\frac{k}{n}\right) = f'(0)\frac{k}{n} + f''(0)\frac{k^2}{2n^2} + \frac{k^2}{n^4}\varepsilon_{k,n}, \quad \text{où } \varepsilon_{k,n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En sommant, on obtient :

$$u_n = f'(0) \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}}_{\rightarrow 1/2} + f''(0) \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2n^2}}_{\rightarrow 0} + \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^4} \varepsilon_{k,n}.$$

Or, toute suite convergente est bornée donc pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $M_k \in \mathbb{R}$ tel que $|\varepsilon_{k,n}| \leq M_k$ et en posant $M = \max_{1 \leq k \leq n} M_k$, on a : $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varepsilon_{k,n} \leq M$ et $\left| \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^4} \varepsilon_{k,n} \right| \leq M \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4}}_{\rightarrow 0}$

donc par théorème d'encadrement $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^4} \varepsilon_{k,n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, par opération sur les limites, on trouve à nouveau : $u_n \rightarrow \frac{f'(0)}{2}$.

3. Comme dans la question précédente, on peut écrire :

$$f(x) = f'(0)x + \mathcal{O}(x^2).$$

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f'(0)\frac{k}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{n^4}\right)$ donc

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right)g\left(\frac{k}{n}\right) = f'(0)\frac{k}{n^2}g\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{k^2}{n^4}b_{k,n} \quad \text{avec } (b_{k,n})_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ une suite bornée.}$$

En sommant, on obtient :

$$v_n = f'(0) \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} g\left(\frac{k}{n}\right) + M \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^4}}_{\rightarrow 0},$$

où M est, comme dans la question précédente, un majorant des suites $(b_{1,n})_{n \in \mathbb{N}^*}, \dots, (b_{n,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Or, par convergence des sommes de Riemann (car $t \mapsto tg(t) \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$), on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} g\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 tg(t)dt.$$

Ainsi, par opération sur les suites convergentes, on a

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(0) \int_0^1 tg(t)dt.$$

Exercice 25 (Annales khass II.6). Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Déterminer les racines de P_n .

2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq n!$.

Correction :

1.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(x+i)(x-i)} = \frac{\frac{1}{2i}[(x+i) - (x-i)]}{(x+i)(x-i)} = \frac{\frac{1}{2i}}{x-i} + \frac{-\frac{1}{2i}}{x+i}.$$

Remarquons que si $g : x \mapsto (x-\alpha)^{-1}$ alors $g' : x \mapsto -(x-\alpha)^{-2}$, ..., et on conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g^{(n)} : x \mapsto (-1)^n n! (x-\alpha)^{-n-1}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{\frac{1}{2i}(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}} - \frac{\frac{1}{2i}(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2i}(-1)^n n! [(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}]}{(x^2+1)^{n+1}},$$

et cette formule est encore valable pour $n=0$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{\frac{1}{2i}(-1)^n n! [(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}]}{(x^2+1)^{n+1}}.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Posons $P_n = \frac{(-1)^n n!}{2i} [(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}] \in \mathbb{C}[X]$. Alors

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{(-1)^n n!}{2i} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} [i^{n+1-k} - (-i)^{n+1-k}] X^k \right) \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2i} \left(0 + 2i(n+1)X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} [i^{n+1-k} - (-i)^{n+1-k}] X^k \right) \\ P_n &= (-1)^n (n+1)! X^n + Q, \end{aligned} \quad \text{avec } Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X].$$

Donc P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n (n+1)!$. Déterminons les racines de P_n dans $\mathbb{C}$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} P_n(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow (\alpha+i)^{n+1} = (\alpha-i)^{n+1} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha+i}{\alpha-i} \right)^{n+1} = 1 \quad \text{car } \alpha \neq i \text{ vu que } i \text{ n'est pas racine de } P_n \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \frac{\alpha+i}{\alpha-i} = e^{i \frac{2k\pi}{n+1}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\alpha+i}{\alpha-i} = e^{i \frac{2k\pi}{n+1}} \quad \text{car } i \neq -i \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\alpha+i) = (\alpha-i) e^{i \frac{2k\pi}{n+1}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha(1 - e^{i \frac{2k\pi}{n+1}}) = -i \left(1 + e^{i \frac{2k\pi}{n+1}} \right) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha = -i \frac{1 + e^{i \frac{2k\pi}{n+1}}}{1 - e^{i \frac{2k\pi}{n+1}}} = -i \frac{e^{i \frac{k\pi}{n+1}} 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{e^{i \frac{k\pi}{n+1}} (-2i) \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}. \end{aligned}$$

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons $\alpha_k = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}$. Vérifions que les α_k sont deux à deux distincts. Soient $k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned} \alpha_k = \alpha_\ell &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{(k-\ell)\pi}{n+1}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(k-\ell)\pi}{n+1} \in \pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{k-\ell}{n+1} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Or, $k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc $-(n-1) \leq k-\ell \leq n-1$ puis $-\frac{n-1}{n+1} \leq \frac{k-\ell}{n+1} \leq \frac{n-1}{n+1}$ d'où $-1 < \frac{k-\ell}{n+1} < 1$. Ainsi,

$$\alpha_k = \alpha_\ell \Leftrightarrow \frac{k-\ell}{n+1} = 0 \Leftrightarrow k = \ell,$$

ce qui prouve que les α_k sont deux à deux distincts. Ainsi, nous avons trouvé les n racines de P_n , qui donc se factorise en :

$$P_n = (-1)^n (n+1)! \prod_{k=1}^n \left(X - \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)} \right) \in \mathbb{R}[X].$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2i} \left(\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}} \right),$$

donc

$$|f^{(n)}(x)| = \frac{n!}{2} \left| \frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{2} \left(\frac{1}{|x-i|^{n+1}} + \frac{1}{|x+i|^{n+1}} \right),$$

par inégalité triangulaire. Or, $x \in \mathbb{R}$ donc $|x-i| = |x+i| = \sqrt{x^2+1} \geq 1$ donc

$$|x-i|^{n+1} = |x+i|^{n+1} \geq 1 \text{ puis } \frac{1}{|x-i|^{n+1}} + \frac{1}{|x+i|^{n+1}} \leq 2 \text{ d'où } |f^{(n)}(x)| \leq n!.$$

Exercice 26 (Annales khass II.7). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Cette suite est-elle monotone ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{\alpha}{n+1} + \int_0^1 \frac{t^{n+1}g(t)}{n+1} dt,$$

où α est un réel et g une fonction continue sur $[0, 1]$ à expliciter.

3. Donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Correction :

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On a : $\forall t \in [0, 1], 0 \leq \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}} \leq t^n$ donc par croissance de l'intégrale sur $[0, 1]$, on a $0 \leq u_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$. Par théorème d'encadrement, on a $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$.

- On a, par linéarité de l'intégrale : $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1} - t^n}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_0^1 \underbrace{\frac{t^n(t-1)}{\sqrt{1+t^2}}}_{\leq 0} dt \leq 0,$

par positivité de l'intégrale sur le segment $[0, 1]$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une IPP, on écrit :

$$\begin{aligned}
 u_n &= \int_0^1 t^n \times \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \\
 &= \left[\underbrace{\frac{t^{n+1}}{n+1}}_{=u(t)} \underbrace{(1+t^2)^{-1/2}}_{=v(t)} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \times -\frac{1}{2}(2t)(1+t^2)^{-3/2} dt \quad \text{avec } u, v \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \\
 &= \frac{1/\sqrt{2}}{n+1} + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} dt \\
 &= \frac{\alpha}{n+1} + \int_0^1 \frac{t^{n+1}g(t)}{n+1} dt, \quad \text{avec } \alpha = 1/\sqrt{2} \text{ et } g : t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}).
 \end{aligned}$$

(c) Puisque $g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}_+)$, on sait d'après le TBA que g est bornée. On peut considérer $\|g\|_\infty$, et on a $0 \leq g \leq \|g\|_\infty$. Par positivité de l'intégrale, on a $0 \leq \int_0^1 t^{n+1}g(t) dt \leq \|g\|_\infty \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{\|g\|_\infty}{n+2}$. Par théorème d'encadrement, on a $\int_0^1 t^{n+1}g(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$\int_0^1 \frac{t^{n+1}g(t)}{n+1} dt = o\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

On en déduit que $u_n \sim \frac{\alpha}{n+1}$ puis $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n\sqrt{2}}}$.

Exercice 27 (Annales khass II.8). Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = \frac{x}{2} + 1 \right\}.$$

1. On suppose que $f \in E$.

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{f(x)}{2} + 1$. (b) Montrer que f' est constante.

2. Conclure.

Correction :

1. Soit $f \in E$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $f \in E$,

$$f\left(\frac{x}{2} + 1\right) = f[f(f(x))] = \frac{f(x)}{2} + 1.$$

(b) $f \in E$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant l'égalité précédente, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{f'(x)}{2}, \text{ puis } \underline{\forall x \in \mathbb{R}, f'\left(\frac{x}{2} + 1\right) = f'(x)}.$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et introduisons la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1 \end{cases}$.

(u_n) est une suite arithmético-géométrique de point fixe 2, donc $(u_n - 2)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 2 = (u_0 - 2)\frac{1}{2^n}$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (x - 2)\frac{1}{2^n} + 2$ puis (u_n) converge vers 2.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, f'(u_{n+1}) = f'(u_n)$ donc en itérant $\forall n \in \mathbb{N}, f'(u_n) = f'(u_0) = f'(x)$.

Or, f' est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier au point 2, d'où par passage à la limite dans l'égalité précédente : $f'(x) = f'(2)$, ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que f' est constante.

2. Procédons par analyse-synthèse = double inclusion ici.

- Si $f \in E$, d'après la question 1., f' est constante donc f est une fonction affine, i.e. de la forme $x \mapsto ax + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = af(x) + b = a(ax + b) + b = a^2x + b(1 + a).$$

Comme $f \in E$, elle vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x}{2} + 1 = a^2x + b(1 + a).$$

En utilisant l'unicité de l'écriture d'un polynôme, on obtient : $a^2 = \frac{1}{2}$ et $b(1 + a) = 1$. Ainsi, $(a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right)$ ou $(a, b) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)$ et $E \subset \left\{ \left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right); \left(x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right) \right\}$.

- Réciproquement, notons $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ $g : x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

Les fonctions affines sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{2} + 1$ donc $f \in E$.

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}, g(g(x)) = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{2} + 1$ donc $g \in E$. On a donc vérifié que $\{f, g\} \subset E$.

Finalement, E est un ensemble fini à deux éléments :

$$E = \left\{ \left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right); \left(x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right) \right\}.$$

Exercice 28 (Annales khass II.9). Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble E des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1.$$

1. On suppose que $f \in E$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que f est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
2. Conclure.

Correction :

1. $f \in E$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - x \int_0^x f + \int_0^x tf(t) dt \quad (*).$$

$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc d'après le théorème fondamental du calcul intégral, $x \mapsto x \int_0^x f$ et $x \mapsto x \int_0^x t f(t) dt$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par opérations, f est également de classe $\mathcal{C}^1$. Mais alors, $x \mapsto x \int_0^x f$ et $x \mapsto x \int_0^x t f(t) dt$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et f aussi. On pourrait même montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En dérivant (*), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = - \int_0^x f - x f(x) + x f(x) = - \int_0^x f.$$

En dérivant à nouveau, on obtient : $f'' = -f$ (f est solution de l'EDL homogène à coefficients constants).

2. D'après ce qui précède, on a trouvé que $E \subset \text{Vect}(\cos, \sin)$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = a \cos + b \sin$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, grâce à deux IPP :

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t) \cos t dt &= [(x-t) \sin t]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \sin t dt \\ &= 0 + [-\cos t]_0^x \\ &= 1 - \cos x, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t) \sin t dt &= [(x-t)(-\cos t)]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \cos t dt \\ &= x - [\sin t]_0^x \\ &= x - \sin x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x (x-t) f(t) dt = a + bx - a \cos - b \sin = a + bx - f(x).$$

Donc :

$$f \in E \iff \forall x \in \mathbb{R}, a + bx = 1 \iff (a = 1 \text{ et } b = 0).$$

En conclusion,

$$E = \{\cos\}.$$

Exercice 29 (Annales khass II.10, TD). On définit f sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 + \frac{\sin(1/x)}{2}$.

1. Montrer que $f(\mathbb{R}^*) \subset \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ et que $f \circ f(\mathbb{R}^*) \subset [1, +\infty[$.
2. Montrer que f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique $\ell \in [1, +\infty[$ tel que $f(\ell) = \ell$.
4. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}^*$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

cf TD dérivation.

Exercice 30 (Annales khass II.11, TD). Déterminer la nature, selon les réels positifs a et b , de la série de terme général :

$$u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + b}.$$

cf TD série.

Exercice 31 (Annales khass II.12). 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x - e^{-x} = n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note désormais x_n cette solution.

2. Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

3. Donner un équivalent simple de $x_n - n$ lorsque n tend vers l'infini.

Correction :

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$ donc f est

$$x \mapsto x - e^{-x}$$

strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc f induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

Comme de plus, f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection monotone :

$$f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f^{(*)}, \lim_{+\infty} f[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R},$$

où $(*)$ peut s'obtenir en écrivant $f(x) = -e^{-x}(1 - xe^x)$ et par croissance comparée.

Ainsi, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Alors $n \in \mathbb{R}$ donc n a un unique antécédent dans $\mathbb{R}$ par la fonction f , ce qui assure que l'équation $x - e^{-x} = n$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$, que l'on notera x_n .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode 1 : Par définition de x_n , on a :

$$\frac{x_n}{n} = \frac{n + e^{-x_n}}{n} = 1 + \frac{e^{-x_n}}{n}.$$

Or, $x_n = n + e^{-x_n} > 0$ donc $e^{-x_n} \leq 1$ et $0 \leq \frac{e^{-x_n}}{n} \leq \frac{1}{n}$. Par encadrement, il vient $\frac{e^{-x_n}}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, $\frac{x_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Méthode 2 : On a : $f(n) = n - e^{-n} < n = f(x_n)$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $n < x_n$.

De plus : $f(n+1) = n + \underbrace{(1 - e^{-(n+1)})}_{>0} > n = f(x_n)$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $n+1 > x_n$.

Ainsi, $n < x_n < n+1$, puis $1 < \frac{x_n}{n} < 1 + \frac{1}{n}$, d'où par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$ donc $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

Méthode 3 :

- On a : $n+1 > n > -1$ et $f(0) = -1$ d'où $f(x_{n+1}) > f(x_n) > f(0)$. Or, f est croissante, donc on en déduit que $x_{n+1} > x_n > 0$ (sinon...). Ainsi, la suite (x_n) est strictement croissante. D'après le théorème de la limite monotone, on sait que (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$ ou bien diverge vers $+\infty$.
 - Raisonnons par l'absurde, en supposant que (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ (donc en ℓ), on aurait : $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell) \in \mathbb{R}$. Or, $f(x_n) = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. L'unicité de la limite de $(f(x_n))$ mène à une contradiction. Ainsi, (x_n) diverge vers $+\infty$.
 - Enfin, $\frac{x_n}{n} = \frac{n + e^{-x_n}}{n} = 1 + \frac{1}{ne^{x_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Ainsi, $\boxed{x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f(x_n) = n$ donc $\underline{x_n - n = e^{-x_n}}$. On conjecture que $x_n - n \sim e^{-n}$. Montrons-le. On a :

$$\frac{x_n - n}{e^{-n}} = e^{n-x_n} = e^{-e^{-x_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, l'exponentielle est continue donc $e^{-x_n} \rightarrow 0$. Ainsi,

$$\boxed{x_n - n \sim e^{-n}}.$$

Exercice 32 (Annales khass II.13). Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \sin x)^{\ln x/x} - x}{x^2 \ln x}$.

Correction : On a :

$$\begin{aligned} (1 + \sin x)^{\ln x/x} &= \exp \left[\frac{\ln x}{x} \ln (1 + x + o(x^2)) \right] \\ &= \exp \left[\frac{\ln x}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \right] \\ &= \exp \left(\ln x - \frac{x \ln x}{2} + o(x \ln x) \right) \\ &= x \exp \left(-\frac{x \ln x}{2} + o(x \ln x) \right) \\ &= x \left(1 - \frac{x \ln x}{2} + o(x \ln x) \right) \quad \text{car } x \ln x \rightarrow 0 \\ &= x - \frac{x^2 \ln x}{2} + o(x^2 \ln x). \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la limite cherchée est } \frac{-1}{2}}$.

Exercice 33 (Annales khass II.15). On pose $v_n = e - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}$ et $u_n = \left(e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \right)^{1/n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists c_n \in [0, 1] : v_n = \frac{e^{c_n}}{n!}.$$

2. Trouver un développement limité à deux termes en $1/n$ de c_n .

On admet que $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ au voisinage de $+\infty$.

3. Donner un équivalent simple w_n de u_n , puis un équivalent de $u_n - w_n$.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît dans $e - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}$ le reste de Taylor de $\exp$ en 0 à l'ordre $n-1$ évalué en 1. Or, la fonction $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur le segment $[0, 1]$ donc d'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$e - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} \exp^{(n)}(t) dt.$$

Donc

$$n!v_n = n \int_0^1 (1-t)^{n-1} e^t dt.$$

Or, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $1 \leq e^t \leq e$ et $(1-t)^{n-1} \geq 0$ donc

$$(1-t)^{n-1} \leq (1-t)^{n-1} e^t \leq e(1-t)^{n-1},$$

et par croissance de l'intégrale sur le segment $[0, 1]$, on a :

$$\int_0^1 n(1-t)^{n-1} dt \leq n!v_n \leq e \int_0^1 n(1-t)^{n-1} dt.$$

Or, $\int_0^1 n(1-t)^{n-1} dt = [-(1-t)^n]_0^1 = 1$, donc

$$e^0 = 1 \leq n!v_n \leq e.$$

Puisque $\exp$ est continue sur le segment $[0, 1]$, le TVI assure l'existence de $c_n \in [0, 1]$ tel que $n!v_n = e^{c_n}$.

2. On veut le développement asymptotique de c_n à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Déterminons d'abord celui de e^{c_n} au même ordre.

D'après 1., on a $v_{n+3} = \frac{e^{c_{n+3}}}{(n+3)!}$, avec $v_{n+3} = v_n - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}$, donc

$$\frac{e^{c_n}}{n!} = v_n = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{e^{c_{n+3}}}{(n+3)!}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 e^{c_n} &= 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{e^{c_{n+3}}}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
 &= 1 + \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{n^2} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
 &= 1 + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{n^2} (1 + o(1)) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
 &= 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
 \end{aligned}$$

Donc

$$c_n = \ln(e^{c_n}) = \ln\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3. Par définition, on a :

$$u_n = v_n^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(v_n)\right) = \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(\frac{e^{c_n}}{n!}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{n} (c_n - \ln(n!))\right).$$

Or, $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ donc $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + o(1))$ donc

$$\begin{aligned}
 \ln(n!) &= \ln\left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right) + \ln(1 + o(1)) \\
 &= n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + o(1),
 \end{aligned}$$

et d'après la question précédente, $c_n = o(1)$ donc

$$\frac{1}{n} (c_n - \ln(n!)) = -\ln n + 1 + o(1).$$

D'où

$$u_n = \exp(-\ln n + 1 + o(1)) = \frac{e}{n} e^{o(1)} \sim \frac{e}{n}.$$

donc

$$u_n \sim w_n \quad \text{avec} \quad w_n = \frac{e}{n}.$$

En reprenant le calcul précédent, on a :

$$\frac{1}{n} (c_n - \ln(n!)) = -\ln n + 1 - \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

donc

$$\begin{aligned} u_n &= \exp \left(-\ln n + 1 - \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n} + o \left(\frac{\ln n}{n} \right) \right) \\ &= \frac{e}{n} \exp \left(\underbrace{-\frac{1}{2} \frac{\ln n}{n} + o \left(\frac{\ln n}{n} \right)}_{\rightarrow 0} \right) \\ &= \frac{e}{n} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n} + o \left(\frac{\ln n}{n} \right) \right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$u_n - w_n = -\frac{e \ln n}{2n^2} + o \left(\frac{\ln n}{n^2} \right) \quad \text{donc} \quad \boxed{u_n - w_n \sim -\frac{e \ln n}{2n^2}}.$$

Exercice 34 (Annales khass II.16, environ TD). Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = f \left(\frac{1}{x} \right) \quad (*).$$

Indication : On pourra poser $x = e^t$.

Correction : Procédons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que vérifiant (*). La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ donc par composée, $f' \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On peut donc dériver (*) et on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} f' \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} f(x).$$

Donc f est solution de l'EDL d'ordre 2 à coefficients non constants $x^2 f'' + f = 0$. Pour la résoudre, posons, comme l'indication le suggère, la fonction $g = f \circ \exp$ (donc $f = g \circ \ln$), définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = f(e^t) \quad g'(t) = e^t f'(e^t) \quad g''(t) = e^t f'(e^t) + (e^t)^2 f''(e^t).$$

Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g''(t) - g'(t) + g(t) = (e^t)^2 f''(e^t) + f(e^t) = 0,$$

d'après l'EDL vérifiée par f .

Remarque : on aurait aussi pu poser d'emblée $g = f \circ \exp$, ce qui donne

$$g'(t) = e^t f'(e^t) \underset{(*)}{=} e^t f \left(\frac{1}{e^t} \right) = e^t f(e^{-t}) = e^t g(-t)$$

et

$$g''(t) = e^t g(-t) - e^t g'(-t) = g'(t) - e^t e^{-t} g(t) = g'(t) - g(t).$$

Ainsi, g est solution de l'EDL d'ordre 2 à coefficients constants $g'' - g' + g = 0$, d'équation caractéristique $r^2 - r + 1 = 0$, ayant pour racines $-j^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-j$.

Par théorème, il existe donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = e^{t/2} \left(A \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right)$ donc

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) &= f(e^{\ln x}) = g(\ln x) \\ &= e^{\ln x/2} \left(A \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right) \\ &= \sqrt{x} \left(A \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right). \end{aligned}$$

Synthèse. Soient $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $f : x \mapsto \sqrt{x} \left(A \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right)$.

On a d'une part :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[A \cos \left(\frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right) - B \sin \left(\frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right) \right],$$

et d'autre part :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[\frac{A + B\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right) + \frac{B - A\sqrt{3}}{2} \sin \left(\frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right) \right].$$

En particulier, pour avoir $f'(1) = f(1)$, il est nécessaire que $\frac{A+B\sqrt{3}}{2} = A$, donc $A = B\sqrt{3}$. Ainsi, $\frac{B-A\sqrt{3}}{2} = -B$ et on a bien $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = f'(x)$, donc f vérifie (*). On en déduit que les fonctions $f : x \mapsto B\sqrt{x} \left[\sqrt{3} \cos \left(\frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right) + \sin \left(\frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right) \right]$ sont solutions du problème.

En conclusion, l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ vérifiant (*) est

$$\left\{ x \mapsto B\sqrt{x} \left[\sqrt{3} \cos \left(\frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right) + \sin \left(\frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right) \right] \mid B \in \mathbb{R} \right\}, \text{ i.e. } \left\{ x \mapsto C\sqrt{x} \cos \left(\frac{\sqrt{3} \ln x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 35 (Annales khass II.17).

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}}{x^3}$.

2. On pose $E = \left\{ K > 0 \mid \forall x \geq 0, \left| \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} \right| \leq Kx^3 \right\}$. Déterminer E .

On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral :

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$, on a :

$$\forall (a, x) \in I^2, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Correction :

1. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{6}x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Donc : $\frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}}{x^3} = \frac{1}{16} + o(1)$, d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}}{x^3} = \frac{1}{16}.$$

2. Soit $x \geq 0$. La fonction $f : t \mapsto \sqrt{1+t}$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ donc d'après la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et x :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \int_0^x f^{(3)}(t) \frac{(x-t)^2}{2} dt.$$

On calcule : $f(t) = (t+1)^{1/2}$, $f'(t) = \frac{1}{2}(t+1)^{-1/2}$, $f''(t) = \frac{-1}{4}(t+1)^{-3/2}$, $f^{(3)}(t) = \frac{3}{8}(t+1)^{-5/2}$.
Alors :

$$\left| \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} \right| = \frac{3}{16} \left| \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(t+1)^{5/2}} dt \right| = \frac{3x^3}{16} \int_0^1 \frac{(1-u)^2}{(ux+1)^{5/2}} du,$$

en faisant le changement de variables $t = ux$ (car $u \mapsto ux \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$) et par positivité de l'intégrale sur $[0,1]$.

Notons $\varphi : x \mapsto \frac{3}{16} \int_0^1 \frac{(1-u)^2}{(ux+1)^{5/2}} du$. Alors $E = \{K > 0 \mid \forall x \geq 0, \varphi(x) \leq K\}$. En revenant à la définition, on peut montrer que la fonction φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que φ est maximale en 0 donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi(x) \leq \varphi(0) = \frac{3}{16} \int_0^1 (1-u)^2 du = \frac{3}{16} \int_0^1 v^2 dv = \frac{1}{16}.$$

L'ensemble E , qui représente l'ensemble des majorants de la fonction φ , vaut donc $E = \left[\frac{1}{16}, +\infty \right[$.

Exercice 36 (Annales khass II.18). Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y)f(x-y) = \left(f(x)f(y) \right)^2 \quad (*).$$

1. Déterminer f si $f(0) = 0$. Quelles sont les autres valeurs possibles pour $f(0)$?

2. On suppose $f(0) = 1$.

(a) Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x)$ en fonction de $f(x)$. Montrer que f est à valeurs > 0 .

(b) On pose $g = \ln f$. Montrer que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \int_0^1 g(x+y) dx + \int_0^1 g(x-y) dx = 2 \int_0^1 g(x) dx + 2g(y).$$

En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(c) Déterminer f .

3. Déterminer f si $f(0) = -1$.

Correction :

1. Si $f(0) = 0$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = f(x+0)f(x-0) = (f(x)f(0))^2 = 0,$$

donc f est nulle.

De manière générale, on a $f(0+0)f(0-0) = (f(0)f(0))^2$ i.e. $f(0)^2 = f(0)^4$ donc $f(0)^2(1-f(0)^2) = 0$ d'où $f(0) = 0$ ou $f(0)^2 = 1$. Ainsi, $f(0) \in \{-1, 0, 1\}$.

2. (a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+x) \underbrace{f(x-x)}_{=f(0)=1} = (f(x)f(x))^2$ i.e. $f(2x) = f(x)^4$, donc

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = f\left(\frac{y}{2}\right)^4 \geq 0.$$

S'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) = 0$. Alors $f\left(\frac{y}{2}\right) = 0$ puis par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{y}{2^n}\right) = 0$. Or, $\frac{y}{2^n} \rightarrow 0$ et f est continue en 0, donc par passage à la limite, on obtient $f(0) = 0$: contradiction.

Ainsi, $\forall y \in \mathbb{R}, f(y) \neq 0$ donc $f > 0$.

(b) Par définition. $g = \ln f$. En passant au $\ln$ dans (*), on obtient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x+y) + g(x-y) = 2g(x) + 2g(y) \quad (\spadesuit)$$

En intégrant x entre 0 et 1, on obtient :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \int_0^1 g(x+y)dx + \int_0^1 g(x-y)dx = 2 \int_0^1 g(x)dx + 2g(y)$$

c'est-à-dire

$$\forall y \in \mathbb{R}, \int_y^{y+1} g + \int_{-y}^{1-y} g = 2 \int_0^1 g + 2g(y)$$

donc

$$g : y \mapsto \frac{1}{2} \int_y^{y+1} g + \frac{1}{2} \int_{-y}^{1-y} g - \int_0^1 g \quad \heartsuit.$$

Montrons par récurrence que $g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On sait que $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ et $\ln \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ donc leur composée $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors, d'après le théorème fondamental du calcul intégral,

$y \mapsto \frac{1}{2} \int_y^{y+1} g + \frac{1}{2} \int_{-y}^{1-y} g - \int_0^1 g$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc g aussi, ce qui prouve l'hérédité.

Ainsi, $g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(c) En dérivant (♥) par rapport à y , il vient :

$$\forall y \in \mathbb{R}, g'(y) = \frac{1}{2} \underbrace{(g(1+y) + g(1-y))}_{=g(1)+g(y)} - \frac{1}{2} (g(y) + g(-y)),$$

d'après (♠). Remarquons aussi que

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(0+y)f(0-y) = \left(\underbrace{f(0)}_{=1} f(y) \right)^2$$

et f ne s'annule pas, donc

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(-y) = f(y),$$

ce qui prouve que f est paire, et donc g aussi. Ainsi,

$$\forall y \in \mathbb{R}, g'(y) = g(1).$$

La fonction g' est donc constante, d'où g est affine. Mais, g est paire donc g est constante, et f aussi. Puisque $f(0) = 1$, on a $f : x \mapsto 1$.

3. Si $f(0) = -1$, alors en posant $h = -f$, on voit que h vérifie les mêmes hypothèses que la fonction f de la question 2. donc $h : x \mapsto 1$ d'où $f : x \mapsto -1$.

Exercice 37 (Annales khass II.19).

1. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = X^{2n} - 1$.

2. Soit $r \in \mathbb{R}$. Calculer $\prod_{k=1}^n \left(1 - 2r \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) + r^2 \right)$.

3. Calculer, pour $r \in \mathbb{R}$ avec $|r| \neq 1$, $I(r) = \int_0^\pi \ln \left(1 - 2r \cos t + r^2 \right) dt$.

Correction :

1.

$$\begin{aligned} P = X^{2n} - 1 &= \prod_{\omega \in \mathbb{U}_{2n}} (X - \omega) = \prod_{k=0}^{2n-1} \left(X - \underbrace{\exp \frac{2ik\pi}{2n}}_{=: \omega_k} \right) \\ &= (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k)(X - \overline{\omega_k}) \\ P &= \left(X^2 - 1 \right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right) \quad (*) \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=1}^n \left(1 - 2r \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) + r^2 \right) &= (1 + 2r + r^2) \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - 2r \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) + r^2 \right) \\
 &= (1 + r)^2 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - 2r \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) + r^2 \right) \\
 &= \begin{cases} (1 + r)^2 \frac{r^{2n} - 1}{r^2 - 1} = (r^{2n} - 1) \frac{r + 1}{r - 1} & \text{si } r \neq \pm 1 \text{ (qu. précédente)} \\ 0 & \text{si } r = -1 \\ 2^2 \prod_{k=1}^{n-1} \left(2 - 2 \cos \frac{k\pi}{n} \right) & \text{si } r = 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Simplifions l'expression dans le cas où $r = 1$.

En dérivant (*), on obtient

$$P' = 2X \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right) + (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(2X - 2 \cos \frac{k\pi}{n} \right)$$

donc

$$P'(1) = 2 \prod_{k=1}^{n-1} \left(2 - 2 \cos \frac{k\pi}{n} \right) + 0.$$

On a aussi $P' = 2nX^{2n-1}$ donc $P'(1) = 2n$. Par égalité, on en déduit que :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(2 - 2 \cos \frac{k\pi}{n} \right) = n$$

donc

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - 2r \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) + r^2 \right) = \begin{cases} (r^{2n} - 1) \frac{r + 1}{r - 1} & \text{si } r \neq \pm 1 \\ 0 & \text{si } r = -1 \\ 4n & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

3. Soit $r \in \mathbb{R}$ avec $|r| \neq 1$. Alors $r \neq \pm 1$. La fonction $t \mapsto \ln(1 - 2r \cos t + r^2)$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ donc d'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a

$$\begin{aligned}
 I(r) &= \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos t + r^2) dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - 2r \cos \frac{k\pi}{n} + r^2 \right) dt && \text{(somme de Riemann)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \ln \prod_{k=1}^n \left(1 - 2r \cos \frac{k\pi}{n} + r^2 \right) dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \ln \left((r^{2n} - 1) \frac{r + 1}{r - 1} \right) && \text{d'après 2.}
 \end{aligned}$$

Distinguons les cas.

- **Cas où $r \in]-1, 1[$.** Alors $0 \leq r^2 < 1$ donc $r^{2n} \rightarrow 0$ et $(r^{2n} - 1) \frac{r+1}{r-1} \rightarrow \frac{1+r}{1-r} > 0$ donc par continuité du $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \ln \left((r^{2n} - 1) \frac{r+1}{r-1} \right) = 0$, donc $I(r) = 0$.

- **Cas où $r < -1$ ou $r > 1$.** Alors $r^2 < 1$ donc $r^{2n} \rightarrow +\infty$. On écrit alors :

$$\ln \left((r^{2n} - 1) \frac{r+1}{r-1} \right) = \ln(r^{2n}) + \underbrace{\ln \left(1 - \frac{1}{r^{2n}} \right)}_{=: u_n} + \ln \frac{r+1}{r-1} = 2n \ln r + u_n,$$

avec $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{r+1}{r-1}$. Ainsi, par opérations :

$$\frac{\pi}{n} \ln \left((r^{2n} - 1) \frac{r+1}{r-1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\pi \ln r + 0 = I(r).$$

En conclusion :

$$I(r) = \begin{cases} 2\pi \ln r & \text{si } |r| > 1 \\ 0 & \text{si } |r| < 1 \end{cases}$$

Exercice 38 (Annales khass II.20). Soit $f : x \mapsto x^3 + x$.

1. Vérifier que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ dont la réciproque g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, impaire et strictement croissante.
2. Donner un développement limité de g à la précision $o(x^5)$ en 0.
3. Donner un développement asymptotique à trois termes de g en $+\infty$.

Correction :

1. $f : x^3 + x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le TBM, f induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$, qui est également strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme f est impaire, sa bijection réciproque g l'est aussi (exercice classique).

De plus, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f' : x \mapsto 3x^2 + 1$ ne s'annule pas donc $\boxed{g = f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$.

2. **Première méthode.** On a : $f(x) = x + x^3 + o(x^5)$. Comme $g \in \mathcal{C}^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on sait d'après la formule de Taylor-Young que g admet un DL à l'ordre 5 en 0. De plus, $f(0) = 0$ donc $g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1$, et par imparité de g , le DL de g à l'ordre 5 en 0 est de la forme :

$$g(y) = y + ay^3 + by^5 + o_{y \rightarrow 0}(y^5), \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on a :

$$x = g(f(x)) = f(x) + a(f(x))^3 + b(f(x))^5 + o_{x \rightarrow 0}(f(x)^5).$$

Or, $f(x) = x + x^3 + o(x^5)$, $f(x)^2 = x^2 + 2x^4 + o(x^5)$, $f(x)^3 = x^3 + 3x^5 + o(x^5)$, $f(x)^5 = x^5 + o(x^5)$

et $\underset{x \rightarrow 0}{o}(f(x)^5) = o(x^5)$ donc en remplaçant dans l'égalité précédente, on obtient :

$$x = x + (a+1)x^3 + (3a+b)x^5 + o(x^5).$$

Par unicité du DL à l'ordre 5 en 0 de l'identité, on a $a+1=0$ et $3a+b=0$ donc $a=-1$ et $b=-3a=3$.

Ainsi,

$$g(y) = y - y^3 + 3y^5 + \underset{y \rightarrow 0}{o}(y^5).$$

Deuxième méthode. $f(x) = x^3 + x$ donc $y = g(y)^3 + g(y) = g(y)[g(y)^2 + 1]$. Comme $g(0) = 0$ et g est continue en 0, on a $g(y)^2 + 1 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$ donc $g(y) \underset{0}{\sim} y$, d'où $g(y) = y + \underset{y \rightarrow 0}{o}(y)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{y}{g(y)^2 + 1} = \frac{y}{1(y + o(y))^2} = \frac{y}{1 + y^2 + o(y^2)} \\ &= y(1 - y^2 + o(y^2)) \\ &= y - y^3 + o(y^3). \end{aligned}$$

En réinjectant, on obtient :

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{y}{g(y)^2 + 1} = \frac{y}{1 + [y - y^3 + o(y^4)]^2} \\ &= y \times \frac{1}{1 + y^2 - 2y^4 + o(y^4)} \\ &= y[1 - y^2 + 2y^4 + (y^2)^2 + o(y^4)] \\ &= y[1 - y^2 + 3y^4 + o(y^4)] \\ g(y) &= y - y^3 + 3y^5 + \underset{y \rightarrow 0}{o}(y^5). \end{aligned}$$

3. A nouveau : $f(x) = x^3 + x$ donc $y = g(y)^3 + g(y) = g(y)^3 \left[1 + \frac{1}{g(y)^2}\right]$. Comme $\lim_{+\infty} g = +\infty$, on a $1 + \frac{1}{g(y)^2} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 1$ donc $g(y)^3 \underset{+\infty}{\sim} y$, d'où $g(y) \underset{+\infty}{\sim} y^{1/3}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{y^{1/3}}{\left(1 + \frac{1}{g(y)^2}\right)^{1/3}} \text{ avec } \frac{1}{g(y)^2} \underset{+\infty}{\sim} y^{-2/3} \\ &= y^{1/3} \left(1 + y^{-2/3} + o(y^{-2/3})\right)^{-1/3} \\ &= y^{1/3} \left(1 - \frac{1}{3}y^{-2/3} + o(y^{-2/3})\right). \end{aligned}$$

D'où

$$g(y)^2 = y^{2/3} \left(1 - \frac{1}{3}y^{-2/3} + o(y^{-2/3})\right)^2 = y^{2/3} \left(1 - \frac{2}{3}y^{-2/3} + o(y^{-2/3})\right)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(y)^2} &= y^{-2/3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}y^{-2/3} + o(y^{-2/3})} \\ &= y^{-2/3} \times \left(1 + \frac{2}{3}y^{-2/3} + o(y^{-2/3})\right)\end{aligned}$$

donc

$$1 + \frac{1}{g(y)^2} = 1 + y^{-2/3} + \frac{2}{3}y^{-4/3} + o(y^{-4/3}).$$

En réinjectant, on obtient :

$$\begin{aligned}g(y) &= y^{1/3} \left(1 + \frac{1}{g(y)^2}\right)^{-1/3} \\ &= y^{1/3} \left(1 + y^{-2/3} + \frac{2}{3}y^{-4/3} + o(y^{-4/3})\right)^{-1/3} \\ &= y^{1/3} \left[1 - \frac{1}{3} \left(y^{-2/3} + \frac{2}{3}y^{-4/3} + o(y^{-4/3})\right) + \frac{-\frac{1}{3} \left(-\frac{4}{3}\right)}{2} y^{-4/3} + o(y^{-4/3})\right] \\ &= y^{1/3} \left[1 - \frac{1}{3}y^{-2/3} + \left(-\frac{2}{9} + \frac{2}{9}\right) y^{-4/3} + o(y^{-4/3})\right] \\ g(y) &= \boxed{y^{1/3} - \frac{1}{3}y^{-2/3} + o_{y \rightarrow +\infty}(y^{-4/3})}.\end{aligned}$$

Exercice 39 (Annales khass II.21). Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln \cos x} + \frac{2}{\sin^2 x} \right)$.

On a :

$$\begin{aligned}\ln(\cos x) &= \ln \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{2} \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln \cos x} &= -\frac{2}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \\ &= -\frac{2}{x^2} \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \\ \frac{1}{\ln \cos x} &= \boxed{\frac{2}{x^2} \left(-1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)}.\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sin^2 x} &= \frac{2}{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2} = \frac{2}{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)} \\ &= \frac{2}{x^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)} \\ \frac{2}{\sin^2 x} &= \boxed{\frac{2}{x^2} \left(1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2) \right)}.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{\ln \cos x} + \frac{2}{\sin^2 x} = \frac{2}{x^2} \left[\underbrace{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right)}_{=1/2} x^2 + o(x^2) \right] = 1 + o(1),$$

donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln \cos x} + \frac{2}{\sin^2 x} \right) = 1}.$$

Exercice 40 (Annales khass II.22). Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \frac{e^x}{x}$$

1. Justifier brièvement que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n tel que

$$\forall x > 0, f^{(n)}(x) = \frac{e^x}{x^{n+1}} P_n(x).$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a) P_n + P'_n = X^n$$

$$(b) P_n(0) = (-1)^n n!$$

4. En calculant de deux manières $\int_0^x t^n e^t dt$, déterminer les coefficients du polynôme P_n .

Correction :

1. f est un quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On a l'initialisation avec $P_0 = 1$ (unitaire et de degré 0).
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n tel que

$$\forall x > 0, f^{(n)}(x) = P_n(x)x^{-(n+1)}e^x.$$

$f^{(n)}$ étant dérivable, on obtient pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(P_n(x)x^{-(n+1)} + P'_n(x)x^{-(n+1)} - (n+1)P_n(x)x^{-(n+2)} \right) e^x \\ &= \frac{xP_n(x) + xP'_n(x) - (n+1)P_n(x)}{x^{n+2}} e^x \\ &= \frac{P_{n+1}(x)}{x^{n+2}} e^x, \text{ avec } \boxed{P_{n+1} = XP_n + XP'_n - (n+1)P_n}. \end{aligned}$$

$\deg(XP_n) = n+1$, $\deg(XP'_n) = n$, $\deg((n+1)P_n) = n$ donc $\deg(P_{n+1}) = n+1$ et son coefficient dominant est celui de XP_n , donc 1 (car P_n est unitaire). On a bien l'hérédité, ce qui conclut la récurrence.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = P_n + P'_n$ et on montre par récurrence sur n que $Q_n = X^n$.
On a $Q_0 = P_0 = 1 = X^0$ donc l'initialisation.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q_n = X^n$.
On a $P'_{n+1} = P_n + XP'_n + P'_n + XP''_n - (n+1)P'_n$ donc

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= P_{n+1} + P'_{n+1} \\ &= (P_n + P'_n) + X(P_n + P'_n) + X(P'_n + P''_n) - (n+1)(P_n + P'_n) \\ &= (X-n)Q_n + XQ'_n \\ &= (X-n)X^n - nX^n \\ &= X^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où l'hérédité, ce qui conclut la récurrence. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P_n + P'_n = X^n}$.

- (b) Grâce à la formule de récurrence vérifiée par P_n , on trouve :

$$P_n(0) = -nP_{n-1}(0) = (-1)^2n(n-1)P_{n-2}(0) = \cdots = (-1)^n n! \underbrace{P_0(0)}_{=1} = (-1)^n n!$$

(ce que l'on peut vérifier proprement par récurrence sur n).

4. D'une part, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
 \int_0^x t^n e^t dt &= \int_0^x (P_n(t) + P'_n(t)) e^t dt \\
 &= \int_0^x P_n(t) e^t dt + \int_0^x P'_n(t) e^t dt && \text{par linéarité} \\
 &= \int_0^x P_n(t) e^t dt + \left[P_n(t) e^t \right]_0^x - \int_0^x P_n(t) e^t dt && \text{par IPP} \\
 &= P_n(x) e^x - P_n(0) e^0 \\
 &= P_n(x) e^x - (-1)^n n! && \text{question précédente.}
 \end{aligned}$$

D'autre part, en notant $I_n = \int_0^x t^n e^t dt$, et grâce à une IPP, on a :

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^x t^n e^t dt = \left[t^n e^t \right]_0^x - \int_0^x n t^{n-1} e^t dt \\
 I_n &= x^n e^x - n I_{n-1}.
 \end{aligned}$$

En itérant, on obtient :

$$\begin{aligned}
 I_n &= x^n e^x - n(x^{n-1} e^x - (n-1) I_{n-2}) \\
 &= x^n e^x - n x^{n-1} e^x + n(n-1) x^{n-2} e^x - n(n-1)(n-2) x^{n-3} e^x + \dots + (-1)^{n-1} n(n-1) \dots 2 x e^x + (-1)^n n! I_0 \\
 &\quad \text{où } I_0 = \int_0^x e^t dt = e^x - 1 \\
 &= \left[x^n - n x^{n-1} + n(n-1) x^{n-2} + \dots + (-1)^n n! \right] e^x - (-1)^n n!.
 \end{aligned}$$

Les deux écritures de I_n permettent d'en déduire que :

$$P_n = X^n - n X^{n-1} + n(n-1) X^{n-2} + \dots + (-1)^n n! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}.$$

3 Probabilités

Exercice 41. Une urne contient 4 boules indiscernables numérotées de 0 à 3. On tire simultanément deux boules, et on note X_1 et X_2 les numéros obtenus. On pose $X = \min(X_1, X_2)$ et $Y = \max(X_1, X_2)$.

1. Déterminer Ω , $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
2. Soient $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$. Déterminer $P(X = i, Y = j)$.
3. En déduire les lois de X et de Y .
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

Correction :

1. $\Omega = \{\text{parties à 2 éléments de } \llbracket 0, 3 \rrbracket\}$ (les tirages sont simultanés donc l'ordre ne compte pas).
Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = \binom{4}{2} = 6$. On a $\Omega = \{\{0, 1\}; \{0, 2\}; \{0, 3\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{2, 3\}\}$ et $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$,
 $Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
2. Soient $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$. Alors
 - Si $i > j$, on a immédiatement $P(X = i, Y = j) = 0$.
 - Si $i = j$, alors $P(X = i, Y = j) = P(X = i, Y = i) = P(X_1 = i, X_2 = i) = 0$ car le tirage est simultané.
 - Si $i < j$, alors $P(X = i, Y = j) = P(\{i, j\}) = \frac{1}{6}$.
3. Pour tout $i \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ et pour tout $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, grâce à la formule des probabilités totales,

$$P(X = i) = \sum_{j=1}^3 P(X = i, Y = j) = \sum_{j=i+1}^3 \frac{1}{6} = \frac{3-i}{6}$$

et

$$P(Y = j) = \sum_{i=0}^2 P(X = i, Y = j) = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{6} = \frac{j}{6}.$$

Les lois de X et Y sont données par :

$k \in X(\Omega)$	0	1	2	Total
$P(X = k)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

et

$k \in Y(\Omega)$	1	2	3	Total
$P(Y = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

4. On a $\mathbb{E}(X) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$, $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} = \frac{7}{3}$ et $\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1$, $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{27}{6} = 6$,
d'où $\mathbb{V}(X) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ et $\mathbb{V}(Y) = 6 - \frac{49}{9} = \frac{5}{9}$.

Exercice 42 (Annales khass III.2). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} = P((X = i) \cap (Y = j)).$$

Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1. On note $C = AU$ et $L = U^T A$.

1. Déterminer les coefficients du vecteur colonne C et du vecteur ligne L . Quel est le rapport avec les variables X et Y ?
2. Montrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, A est de rang 1.

Correction :

1. Notons

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = (L_1 \dots L_n).$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad C_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n P((X = i) \cap (Y = j)) = \underline{P(X = i)},$$

car la famille $(\{Y = j\}_{1 \leq j \leq n})$ est un système complet d'évènements, et

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad L_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n P((X = i) \cap (Y = j)) = \underline{P(Y = j)}.$$

Le vecteur colonne C contient la loi de X et le vecteur ligne L contient la loi de Y .

2.

$$\begin{aligned} X \perp\!\!\!\perp Y &\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i)P(Y = j) \\ &\iff A = CL \\ &\iff A = [P(Y = 1)C \ P(Y = 2)C \ \dots \ P(Y = n)C]. \end{aligned}$$

- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $A = [P(Y = 1)C \ P(Y = 2)C \ \dots \ P(Y = n)C]$ donc toutes les colonnes sont proportionnelles au vecteur colonne C . Comme ni C , ni L ne sont nuls, on en déduit que $\text{rg}(A) = \dim \text{Vect}(C) = 1$. On a l'implication directe.
- Supposons que $\text{rg}(A) = 1$. On peut alors trouver une colonne non nulle de A , disons la j_0 -ème que l'on notera $\text{Col}_{j_0}(A)$, et alors toutes les autres lui sont proportionnelles. Il existe donc $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$, avec $\alpha_{j_0} = 1$, tels que :

$$A = (\alpha_1 \text{Col}_{j_0}(A), \dots, \alpha_n \text{Col}_{j_0}(A)) = \text{Col}_{j_0}(A)(\alpha_1 \dots \alpha_n).$$

Les coefficients de A sont tous positifs donc ceux de C_{j_0} aussi. Pour créer un vecteur contenant une loi de probabilité, il faut que la somme de ses coefficients soit égale à 1. Notons S la somme des coefficients de C_{j_0} (qui est non nulle car les $C_{j_0} \neq 0$ et ses coefficients sont positifs). Alors $S = P(Y = j_0)$. Posons

$$\tilde{C} := \frac{1}{S} \text{Col}_{j_0}(A) = \begin{pmatrix} P_{(Y=j_0)}(X = 1) \\ \vdots \\ P_{(Y=j_0)}(X = n) \end{pmatrix}.$$

Alors, on a :

$$A = \tilde{C} \times \underbrace{S(\alpha_1 \dots \alpha_n)}_{=: \tilde{L}}.$$

Remarquons que les coefficients de $\tilde{L}$ sont tous positifs et calculons leur somme.

De $A = \tilde{C} \times \tilde{L}$, on déduit :

$$1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \tilde{C}_j \right)}_{=1} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{L}_i \right), \text{ donc } \sum_{i=1}^n \tilde{L}_i = 1.$$

Ainsi, le vecteur $\tilde{L}$ contient une loi de probabilité.

Pour finir, $C = AU = \tilde{C} \underbrace{\tilde{L}U}_{=1} = \tilde{C}$ donc $C = \tilde{C}$ et de même $L = U^T A = \tilde{L}$.

On a donc : $A = CL$, et d'après l'équivalence, on en déduit que X et Y sont indépendants, d'où l'implication

Exercice 43 (Annales khass III.3). Soient k et n deux entiers tels que $1 \leq n \leq k \leq 2n$.

Une troupe de comédiens donne deux représentations de théâtre pour les $2n$ vacanciers d'un hôtel. Les représentations ont lieu dans une salle de k places.

On suppose que chacun des vacanciers choisit au hasard d'aller à l'une des deux séances. On suppose également que toute personne refusée à la première séance par manque de places se présente à nouveau à la seconde séance.

On note X la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de vacanciers se présentant à la première séance.

1. Donner la loi de X .
2. Soit A l'événement « Toutes les personnes assistent à une représentation ». Calculer $P(A)$ en fonction de k .
3. Démontrer que $P(A) > \frac{1}{2}$.

Correction :

1. $X \sim \mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$.

2. A est l'événement $(X \geq 2n - k)$. En effet, on a $0 \leq 2n - k \leq n \leq k$ donc si au moins $2n - k$ personnes se présentent à la première séance, alors il y aura au moins $2n - k$ (car $2n - k \leq k$) personnes qui assisteront à la première séance et il restera moins de k personnes à caser lors de la seconde séance (ce qui est possible, au vu de la jauge).

Ainsi,

$$P(A) = \sum_{j=2n-k}^{2n} \binom{2n}{j} \frac{1}{2^j} \frac{1}{2^{2n-j}} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=2n-k}^{2n} \binom{2n}{j}.$$

3. Comme $2n - k \leq n \leq 2n$ et que l'on somme des réels positifs, on a :

$$\begin{aligned}
 P(A) &\geq \frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j} \\
 &= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=n+1}^{2n} \binom{2n}{j} \\
 &> \frac{1}{2} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \underbrace{\frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=n+1}^{2n} \binom{2n}{j}}_{=:S} \quad \text{car} \quad \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} > 0 \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

En effet, grâce à la formule du binôme de Newton et symétrie des coefficients binomiaux, on a :

$$1 = \underbrace{\frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n}{j}}_{=:S} + \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \underbrace{\frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=n+1}^{2n} \binom{2n}{j}}_{=:S}.$$

Donc

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + S = \frac{1}{2}.$$

En conclusion, on a : $\boxed{P(A) > \frac{1}{2}}$.

Exercice 44 (Annales khass III.4). On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune n boules numérotées de 1 à n , avec $n \geq 2$. On tire une boule dans chaque urne et on note X_i le numéro de la boule tirée dans l'urne U_i . On note E_n l'événement « X_1/X_2 est un entier ».

1. Calculer $P(E_2)$, $P(E_3)$.
2. Calculer $P(E_n)$. Le résultat sera donné sous la forme d'une somme.
3. Montrer, pour tout entier $n \geq 2$, que $\ln\left(\frac{n+1}{2}\right) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln n$.
4. Donner la limite de $P(E_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, ainsi qu'un équivalent.

Correction :

1. Si $n = 2$ (resp. $n = 3$) alors $\Omega = \llbracket 1, 2 \rrbracket^2$ (resp. $\Omega = \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$), et on le munit de la probabilité uniforme P . Alors :

$$P(E_2) = \frac{\text{Card}((1, 1); (2, 1); (2, 2))}{\text{Card}(\llbracket 1, 2 \rrbracket^2)} = \boxed{\frac{3}{4}} \text{ et } P(E_3) = \frac{\text{Card}((1, 1); (2, 1); (3, 1); (2, 2); (3, 3))}{\text{Card}(\llbracket 1, 3 \rrbracket^2)} = \boxed{\frac{5}{9}}.$$

2. Remarquons que $\{X_2 = k\}_{1 \leq k \leq n}$ est un SCE donc $E_n = \bigsqcup_{k=1}^n \{X_2 = k, X_1 \text{ est un multiple de } k\}$,

puis par additivité de P :

$$P(E_n) = \sum_{k=1}^n P(X_2 = k, X_1 \text{ est un multiple de } k) = \sum_{k=1}^n \frac{\#\{\text{multiples de } k \text{ dans } \llbracket 1, n \rrbracket\}}{n^2} = \boxed{\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor}.$$

3. Soient $n \geq 2$ et $f : t \mapsto \frac{1}{t}$. La fonction f est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc grâce à la méthode des rectangles, on obtient :

$$\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t},$$

i.e.

$$\forall k \geq 2, \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1).$$

Puis, en sommant pour k variant de 2 à n , et par télescopage, on a :

$$\boxed{\ln(n+1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{n+1}{2}\right) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln n}.$$

4.

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{n}{k} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leq \frac{n}{k},$$

donc

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{k} - 1 \right) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k},$$

i.e.

$$\underline{\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq P(E_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}.$$

En utilisant la question 3., il vient :

$$\frac{1}{n} [\ln(n+1) - \ln(2)] \leq P(E_n) \leq \frac{1}{n} [1 + \ln(n)],$$

i.e.

$$\frac{\ln(n)}{n} \underbrace{\left[1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} - \frac{\ln(2)}{\ln(n)} \right]}_{\rightarrow 1} \leq P(E_n) \leq \frac{\ln(n)}{n} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\ln(n)} \right)}_{\rightarrow 1}.$$

Par encadrement, on obtient : $\boxed{P(E_n) \sim \frac{\ln(n)}{n}}$. Or, par croissance comparée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ et par

conservation de la limite dans les équivalents, on a : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = 0}$.

Exercice 45 (Annales khass III.5). La variable aléatoire X est régie par le tirage d'un dé à six faces parfaitement équilibré de sorte que : $\forall i \in \{1, 2, \dots, 6\}, p_i = P(X = i) = \frac{1}{6}$.

La variable aléatoire Y est régie par le tirage d'un dé à six faces truqué de sorte que :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, 6\}, P(Y = j) = q_j \geq 0, \text{ avec } \sum_{j=1}^6 q_j = 1.$$

On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

1. Étant donné un entier naturel p non nul, montrer qu'il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times \llbracket 1, 6 \rrbracket$ tel que $p = 6q + r$.
2. On construit un « dé virtuel » à six faces de la façon suivante : si $X + Y = 6q + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 2, \dots, 6\}$, alors $V = r$.
Montrer que $P(V = 1) = P(V = 2) = \dots = P(V = 6) = \frac{1}{6}$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On écrit la division euclidienne de p par 6 : $p = 6q + r$ avec $r \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$, $q \in \mathbb{N}$, et unicité d'un tel couple.
Si $r \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$, alors on a ce que l'on voulait ; si $r = 0$, alors $q \geq 1$ (car p est supposé non nul), et on écrit alors : $p = 6(q - 1) + 6$, ce qui conclut.
2. On a $X(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket = Y(\Omega)$ donc $(X + Y)(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket$, et $X + Y = 6q + r$ avec $r \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ et $q \in \mathbb{N}$ donc $q \in \{0, 1\}$.
On a :

$$\begin{aligned} P(V = 1) &= P(X + Y = 7) \\ P(V = 2) &= P(X + Y = 2) + P(X + Y = 8) \\ P(V = 3) &= P(X + Y = 3) + P(X + Y = 9) \\ P(V = 4) &= P(X + Y = 4) + P(X + Y = 10) \\ P(V = 5) &= P(X + Y = 5) + P(X + Y = 11) \\ P(V = 6) &= P(X + Y = 6) + P(X + Y = 12). \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} P(X + Y = 7) &= \sum_{j=1}^6 P(Y = j, X = 7 - j) \\ &= \sum_{j=1}^6 P(Y = j)P(X = 7 - j) && \text{par indépendance} \\ &= \sum_{j=1}^6 q_j \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} && \text{car } \sum_{j=1}^6 q_j = 1. \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
 P(X + Y = 2) + P(X + Y = 8) &= P(X = 1, Y = 1) + \sum_{j=2}^6 P(Y = j, X = 8 - j) \\
 &= \frac{1}{6}q_1 + \sum_{j=2}^6 \frac{1}{6}q_j \\
 &= \frac{1}{6} \times \sum_{j=1}^6 q_j \\
 &= \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
 P(X + Y = 3) + P(X + Y = 9) &= \sum_{j=1}^3 P(Y = j, X = 3 - j) + \sum_{j=3}^6 P(Y = j, X = 9 - j) \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{j=1}^3 q_j + \sum_{j=3}^6 \frac{1}{6}q_j = \frac{1}{6} \times \sum_{j=1}^6 q_j = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(V = 1) = P(V = 2) = \dots = P(V = 6) = \frac{1}{6}}.$

Exercice 46 (Annales khass III.6). Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. On considère n papiers numérotés de 0 à $n - 1$. Sur le papier numéro k on écrit le nombre complexe $\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$. On place ces papiers dans une urne et on tire un papier au hasard. On note X la partie réelle du complexe obtenu et Y sa partie imaginaire.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
2. Est-il vrai que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$?
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction : Introduisons Z la variable aléatoire correspondant au numéro du papier tiré. Alors $Z \sim \mathcal{U}(\llbracket 0, n - 1 \rrbracket)$, $X = \cos(2\pi Z/n)$ et $Y = \sin(2\pi Z/n)$.

1. Par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2\pi k/n) = \frac{1}{n} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2\pi k/n) = \frac{1}{n} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right).$$

Or, $\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = 0$ dès que $n \geq 2$, ce qui est le cas ici, donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = 0 = \mathbb{E}(Y)}$, donc X et Y sont centrées.

2. Par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2\pi k/n) \sin(2\pi k/n) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(4\pi k/n) = \frac{1}{2n} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{4i\pi k}{n}} \right).$$

Si $n > 2$, alors $e^{\frac{4i\pi}{n}} \neq 1$ et $\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{2n} \operatorname{Im} \left(\frac{1 - e^{4i\pi}}{1 - e^{\frac{4i\pi}{n}}} \right) = 0$; si $n = 2$, alors $Y = 0$ donc $\mathbb{E}(XY) = 0$.

Dans tous les cas, $\boxed{\mathbb{E}(XY) = 0 = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}$, donc la réponse est oui.

3. **Indication** : étudier l'évènement $\{Y = 0\}$. Remarquons que

$$\{Y = 0\} = \left\{ \sin \left(\frac{2\pi Z}{n} \right) = 0 \right\} = \left\{ \frac{2\pi Z}{n} \equiv 0 \pmod{\pi} \right\} = \left\{ \frac{2\pi Z}{n} \in \{0, \pi\} \right\} = \{Z = 0\} \sqcup \left\{ Z = \frac{n}{2} \right\},$$

où la troisième égalité provient du fait que $0 \leq Z \leq n-1$ donc que $0 \leq \frac{2\pi Z}{n} \leq \frac{2\pi(n-1)}{n} < 2\pi$. Ainsi, la valeur de $P(Y = 0)$ dépend de la parité de n . Plus précisément, si n est impair alors $P(Y = 0) = P(Z = 0) = \frac{1}{n}$; si n est pair alors $\{Y = 0\} = \{Z = 0\} \sqcup \{Z = \frac{n}{2}\}$ donc $P(Y = 0) = \frac{2}{n}$. Remarquons également que les variables aléatoires X et Y sont liées par la relation $X^2 + Y^2 = 1$. Ainsi, $\{Y = 0 | X = 1\}$ est l'évènement certain et $P_{\{X=1\}}(Y = 0) = 1$. Ces observations permettent de répondre à la question posée, en distinguant certains cas.

- Si $n = 2$, alors $Y = 0$ (v.a. constante) donc X et Y sont indépendantes (N.B. : une v.a. constante est indépendante de toute variable aléatoire...).
- Si $n \geq 3$ impair, alors $P_{\{X=1\}}(Y = 0) = 1 \neq \frac{1}{n} = P(Y = 0)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.
- Si $n \geq 4$ pair, alors $P_{\{X=1\}}(Y = 0) = 1 \neq \frac{2}{n} = P(Y = 0)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Ainsi, les v.a. X et Y sont indépendantes ssi $n = 2$.