Oral Math – PCSI 2014

I. Algèbre

Exercice I.1

Montrer que $F: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (p, q) & \longmapsto & (2p+1)\,2^q \end{array}$ est une bijection.

Exercice I.2

Soit $(a_1, \dots, a_n, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Calculer $\det \begin{pmatrix} x+a_1 & x & \cdots & x \\ x & x+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & x & x+a_n \end{pmatrix}$.

Exercice I.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X). \end{array}$

1. Justifier brièvement que f permet de définir un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, exprimer $\deg f(P)$ en fonction de $\deg P$.
3. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. Ces deux sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires ?
4. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}_n[X]$ dans laquelle f a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Nota Bene Dans cette matrice carrée les coefficients en ligne i colonne $i-1$ valent 1 et les autres valent 0.

5. Pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, déterminer $\operatorname{Ker} f^k$ et $\operatorname{Im} f^k$. Pour quelles valeurs de $k \in [\![2, n+1]\!]$, a-t-on $\operatorname{Ker} f^k \oplus \operatorname{Im} f^k = \mathbb{C}_n[X]$?

Exercice I.4

On définit par récurrence une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et pour $n \geqslant 2$,

$$T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

1. Expliciter T_2 et T_3.

2. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de T_n.
3. Montrer que : $\forall\theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).(*)$
4. Montrer que T_n est l'unique polynôme à coefficients complexes vérifiant $(*)$.
5. Montrer que T_n admet n racines réelles deux à deux distinctes, qu'on explicitera.

Exercice I.5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \mathbb{R}_{2n}[X]$.

1. Pour $(P,Q) \in E_n^2$, on pose $(P\,|Q) = \sum\limits_{k=-n}^{n} P(k)\,Q(k)$.

   Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E_n.
2. Soit $H_n = \left\{P \in E_n \;\middle|\; \int_{-1}^{1} P(t)\,dt = 0\right\}$.

   Montrer que H_n est un sous-espace vectoriel de E_n ; quelle est sa dimension ? Donner une base de son orthogonal.
3. On prend $n = 1$. Calculer $d\left(X^2, H_1\right)$.

Exercice I.6

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim E = 3$. On suppose $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

1. Quel est le rang de f ?
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   On pourra commencer par choisir $e_3 \notin \ker f$.

Exercice I.7

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $\left(X^2 + X + 1\right)^2$ divise le polynôme $(X+1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$.

Exercice I.8

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.

Soit u_1, u_2, u_3 trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, P la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ défini par : $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $f(e_i) = u_i$.

Soit enfin le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} (u_1\,|u_1) & (u_1\,|u_2) & (u_1\,|u_3) \\ (u_2\,|u_1) & (u_2\,|u_2) & (u_2\,|u_3) \\ (u_3\,|u_1) & (u_3\,|u_2) & (u_3\,|u_3) \end{vmatrix}$.

1. Exprimer Δ à l'aide de $\det(P)$.
2. Montrer que $\Delta \geqslant 0$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\Delta = 0$.
4. On suppose (u_1, u_2) libre et l'on pose $d = d\big(u_3, \mathrm{Vect}(u_1, u_2)\big)$.

   Montrer que $d^2 = \frac{\Delta}{\delta}$, où $\delta = \begin{vmatrix} (u_1\,|u_1) & (u_1\,|u_2) \\ (u_2\,|u_1) & (u_2\,|u_2) \end{vmatrix}$.

Exercice I.9

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n, $n \geqslant 1$. On suppose que :
- $AB = BA$;
- B est nilpotente (c'est–à–dire il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $B^p = 0$).

(a) Montrer que si A est inversible, alors $A+B$ est inversible.

(b) Montrer que si A est inversible, alors $\det(A+B) = \det A$.

(c) Est-il vrai dans le cas général que $\det(A+B) = \det A$?

Exercice I.10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, telle que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\,.$$

(a) Démontrer que A est inversible.
Ind. Considérer $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tX = (x_1, \ldots, x_n)$, tel que $AX = 0$ et introduire un indice k tel que $|x_k| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$

(b) Montrer que $\det A > 0$.

Exercice I.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$ et $A+B$ inversible.

Montrer que : $\operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B = n$.

Exercice I.12

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $B = A - I_3$.

1. Exprimer B^2 en fonction de B.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n, qu'on exprimera en fonction de n, tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
3. La relation obtenue à la question précédente est-elle encore valable si n désigne un entier strictement négatif ?

Exercice I.13

Calculer $\sum\limits_{0 \leqslant 3k \leqslant n} \binom{n}{3k}$. On pourra utiliser les polynômes suivants :

$$P_0 = \sum_{0 \leqslant 3k \leqslant n} \binom{n}{3k} X^{3k} \qquad P_1 = \sum_{0 \leqslant 3k+1 \leqslant n} \binom{n}{3k+1} X^{3k+1} \qquad P_2 = \sum_{0 \leqslant 3k+2 \leqslant n} \binom{n}{3k+2} X^{3k+2}.$$

Exercice I.14

Soit $E = \mathcal{C}^0\left([-1,1]\ ;\ \mathbb{R}\right)$. On définit trois fonctions de E par :

$$\forall x \in [-1,1]\ ,\ f_1(x) = 1 \quad , \quad f_2(x) = x^2 \quad , \quad f_3(x) = |x|\,.$$

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre. On pose $F = \operatorname{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.
2. Montrer qu'en posant, pour tout $(f,g) \in E^2$, $(f\,|g) = \int_{-1}^{1} fg$ on définit un produit scalaire sur E.
3. Déterminer la projection orthogonale de f_3 sur $\operatorname{Vect}(f_1, f_2)$.

II. Analyse

Exercice II.1

Pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $\varphi(n,p) = \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/p}\right)^p$.

1. Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $v_p = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n,p)$, puis $\lim\limits_{p\to+\infty} v_p$.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \lim\limits_{p\to+\infty} \varphi(n,p)$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Exercice II.2

Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Déterminer les couples (x,y) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) + \sin\omega t \\ y'(t) = x(t) - \cos\omega t. \end{cases}$$

Exercice II.3

Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels > 0 vérifiant :
$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

(a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que la série de terme général u_n converge. *Ind.* On pourra considérer la suite de terme général $w_n = \ln\left(n^{b-a}u_n\right)$.

On suppose désormais que (a,b) vérifie cette condition.

(b) Montrer que $nu_n \to 0$.

(c) Calculer la somme de la série de terme général u_n.

Exercice II.4

Soit $E = \left\{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = f(1) = 0\right\}$.

(a) Démontrer que pour tout $x \in [0,1]$, il existe $c \in \,]0,1[$ tel que $f(x) = f''(c)\,\frac{x(x-1)}{2}$.

(b) Montrer qu'il existe $M > 0$, que l'on déterminera, tel que : $\forall f \in E$, $\int_0^1 |f| \leqslant M \sup\limits_{[0,1]} |f''|$. Déterminer la meilleure valeur de M.

Exercice II.5

(a) Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Montrer que $u_n \to f'(0)/2$.

(b) On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^1$, que $f(0) = 0$ et que $f''(0)$ existe. Montrer que $u_n \to f'(0)/2$.

(c) Soient f comme en **(b)** et $g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$. Déterminer la limite de (v_n).

Exercice II.6

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

(a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer les racines de P_n.

Ind. On déterminera deux nombres complexes a et b tels que $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{a}{x-i} + \dfrac{b}{x+i}$.

(b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant n!$.

Exercice II.7

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Cette suite est-elle monotone ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{\alpha}{n+1} + \int_0^1 \frac{t^{n+1} g(t)}{n+1}\, dt,$$
où α est un réel et g une fonction continue sur $[0,1]$ à expliciter.
3. Donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice II.8

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble E des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = \frac{x}{2} + 1.$$

1. On suppose que $f \in E$.
   (a) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{f(x)}{2} + 1.$$
   (b) Montrer que f' est constante.
2. Conclure.

Exercice II.9

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble E des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1.$$

1. On suppose que $f \in E$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que f est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
2. Conclure.

Exercice II.10

On définit f sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 + \frac{\sin(1/x)}{2}$.

1. Montrer que $f(\mathbb{R}^*) \subset \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ et que $f \circ f(\mathbb{R}^*) \subset [1, +\infty[$.
2. Montrer que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique $\ell \in [1, +\infty[$ tel que $f(\ell) = \ell$.
4. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}^*$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice II.11

Déterminer la nature, selon les réels positifs a et b, de la série de terme général :

$$u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + b}.$$

Exercice II.12

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x - e^{-x} = n$ admet une une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note désormais x_n cette solution.
2. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
3. Donner un équivalent simple de $x_n - n$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice II.13

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+\sin x)^{\ln x/x} - x}{x^2 \ln x}$.

Exercice II.14

Soit $\varphi : x \mapsto x^4 + 4x$. On note $I_1 =]-\infty, -1]$ et $I_2 = [-1, +\infty[$.

1. Montrer que $\varphi_1 = \varphi_{|I_1}$ est bijective de I_1 sur un intervalle à préciser.
   Même question pour $\varphi_2 = \varphi_{|I_2}$.
2. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = y$, où y est l'autre solution que x, si elle existe, de l'équation (d'inconnue y) $\varphi(y) = \varphi(x)$; $f(x) = x$ sinon.
   Exprimer $f_1 = f_{|I_1}$ et $f_2 = f_{|I_2}$ à l'aide de φ_1, φ_2 et de leurs inverses. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
3. Montrer que, quand $x \to -1$, $f'(x) \sim \frac{x+1}{f(x)+1}$.
   Donner un équivalent simple de $\varphi(x) - \varphi(-1)$ quand $x \to -1$.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice II.15

(a) On pose $v_n = e - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}$ et $u_n = \left(e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right)^{1/n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists c_n \in [0,1] \ :\ v_n = \frac{e^{c_n}}{n!}.$$

(c) Trouver un développement limité à deux termes en $1/n$ de c_n.

On admet que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ au voisinage de $+\infty$.

(d) Donner un équivalent simple w_n de u_n, puis un équivalent de $u_n - w_n$.

Exercice II.16

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ind. On pourra poser $x = e^t$.

Exercice II.17

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}}{x^3}$.
2. Soit $E = \left\{K > 0 \mid \forall x \geqslant 0\ ,\ \left|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right| \leqslant Kx^3\right\}$.
   Déterminer E.

Exercice II.18

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)\, f(x-y) = \Big(f(x)\, f(y)\Big)^2.$$

1. Déterminer f si $f(0) = 0$. Quelles sont les autres valeurs possibles pour $f(0)$?
2. On suppose $f(0) = 1$.
   (a) Calculer $f(2x)$ en fonction de $f(x)$. Montrer que f est à valeurs > 0.
   (b) On pose $g = \ln f$. Montrer que :
   $$\forall y \in \mathbb{R},\ \int_0^1 g(x+y)\, dx + \int_0^1 g(x-y)\, dx = 2\int_0^1 g(x)\, dx + 2g(y).$$
   En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   (c) Déterminer f.
3. Déterminer f si $f(0) = -1$.

Exercice II.19

(a) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = X^{2n} - 1$.

(b) Soit $r \in \mathbb{R}$. Calculer $\prod_{k=1}^{n} \left(1 - 2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2\right)$.

(c) Calculer, pour $r \in \mathbb{R}$ avec $|r| \neq 1$, $I(r) = \int_0^\pi \ln\left(1 - 2r\cos t + r^2\right) \mathrm{d}t$.

Exercice II.20

Soit $f : x \mapsto x^3 + x$.

(a) Vérifier que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ dont la réciproque g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, impaire et strictement croissante.

(b) Donner un développement limité de g à la précision $o(x^5)$ en 0.

(c) Donner un développement asymptotique à trois termes de g en $+\infty$.

Exercice II.21

Déterminer :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln\cos x}+\frac{2}{\sin^2 x}\right).$$

Exercice II.22

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x}{x} \end{array}$.

1. Justifier brièvement que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n tel que
$$\forall x > 0,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{e^x}{x^{n+1}} P_{n+1}(x).$$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   (a) $P_n + P_n' = X^n$
   (b) $P_n(0) = (-1)^n n!$
4. En calculant de deux manières $\int_0^x t^n e^t\, dt$, déterminer les coefficients du polynôme P_n.

III. Probabilités

Exercice III.1

Une secrétaire doit joindre par téléphone n correspondants. La probabilité de joindre un correspondant est de p. Elle fait une première série d'appels et on note X le nombre de correspondants qui ont été joints. Elle fait ensuite une deuxième série d'appels pour joindre les correspondants qui n'ont pus être joints lors de la première série. On note Y le nombre de correspondants lors de la deuxième série et $Z = X + Y$.

1. Donner la loi de X.
2. Démontrer que Z suit une loi binomiale dont les paramètres sont à préciser.

Exercice III.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = P((X = i) \cap (Y = j)).$$

Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On note $C = AU$ et $L = {}^tUA$.

1. Déterminer les coefficients du vecteur colonne C et du vecteur ligne L. Quel est le rapport avec les variables X et Y ?
2. Montrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, A est de rang 1.

Exercice III.3

Soit k et n deux entiers tels que $1 \leqslant n \leqslant k \leqslant 2n$.
Une troupe de comédiens donne deux représentations de théâtre pour les $2n$ vacanciers d'un hôtel. Les représentations ont lieu dans une salle de k places.
On suppose que chacun des vacanciers choisit au hasard d'aller à l'une des deux séances.
On suppose également que toute personne refusée à la première séance par manque de places se présente à nouveau à la seconde séance.
On note X la variable aléatoire réelle correspondant aux nombre de vacanciers se présentant à la première séance.

1. Donner la loi de X
2. Sait A l'événement ń Toutes les personnes assistent à une représentation ż. Calculer en fonction de k $\mathrm{P}(A)$
3. Démontrer que $\mathrm{P}(A) > \frac{1}{2}$.

Exercice III.4

On considère deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ contenant chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule dans chaque urne et on note X_i le numéro de la boule tirée dans l'urne $\mathcal{U}_i$.
On note E_n l'événement « X_1/X_2 *est un entier* ».

1. Calculer $\mathrm{P}(E_2)$, $\mathrm{P}(E_3)$.
2. Calculer $\mathrm{P}(E_n)$. Le résultat sera donné sous la forme d'une somme.
3. Montrer, pour tout entier $n \geqslant 2$, que $\ln\left(\frac{n+1}{2}\right) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n$.
4. Donner la limite de $\mathrm{P}(E_n)$ lorsque $n \to +\infty$, ainsi qu'un équivalent.

Exercice III.5

La variable aléatoire X est régie par le tirage d'un dé à six faces parfaitement équilibré de sorte que : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, 6\},\ p_i = P(X = i) = \dfrac{1}{6}$.

La variable aléatoire Y est régie par le tirage d'un dé à six faces truqué de sorte que : $\forall j \in \{1, 2, \ldots, 6\},\ P(Y = j) = q_j \geqslant 0$, avec $\sum\limits_{j=1}^{6} q_j = 1$.

On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

1. Étant donné un entier naturel p non nul, montrer qu'il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{N} \times [\![1,6]\!]$ tel que $p = 6q + r$.

2. On construit un « dé virtuel » à six faces de la façon suivante : si $X+Y=6\,q+r$ avec $q\in\mathbb{N}$ et $r\in\{1,2,\ldots,6\}$, alors $V=r$.

   Montrer que $P(V=1)=P(V=2)=\cdots=P(V=6)=\dfrac{1}{6}$.

Exercice III.6

Soit n un entier naturel tel que $n\geqslant 2$. On considère n papiers numérotés de 0 à $n-1$. Sur le papier numéro k on écrit le nombre complexe $\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$. On place ces papiers dans une urne et on tire un papier au hasard. On note X la partie réelle du complexe obtenu et Y sa partie imaginaire.

1. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
2. Est-il vrai que $E(XY)=E(X)E(Y)$?
3. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?