Chapitre 15 : Aspect énergétique du mouvement d'un point ou d'un système

I) Travail et puissance d'une force

I.1) Puissance d'une force $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

I.2) Travail d'une force $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \mathcal{P}\,dt$ et $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{OM}$

I.3) Force conservative $W_{AB}(\vec{F}) = -\Delta E_p$ ou $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -dE_p \iff \vec{F} = -\vec{\mathrm{grad}}\,E_p$

a) Définition

b) Exemples

- Poids $E_p = mgz + \text{cste}$ $\uparrow z$ $\downarrow \vec{g}$
- Gravitation $E_p = -\frac{G m_1 m_2}{r}$
- Rappel élastique $E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$
- Electrostatique : champ créé par une charge ponctuelle $E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$
  champ uniforme $E_p = -qE_0 x + \text{cste}$

II) Théorèmes énergétiques

II.1) Théorème de l'énergie cinétique

$\Delta E_c = \sum_k W(\vec{F_k}) = \sum W(\text{toutes les forces, C et NC})$ ou $\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \sum_k \mathcal{P}(\vec{F_k})}$ théo. de la puissance cinétique

II.2) Théorème de l'énergie mécanique

$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = W(\vec{F}_{NC})$ ou $dE_m = \delta W(\vec{F}_{NC})$ ou $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{NC})$

II.3) Applications (exercices)

a) Saut à ski d'un tremplin

b) Pendule simple

III) Etude qualitative des mouvements conservatifs à 1 dimension et des équilibres

III.1) Etat libre et état lié $E_m \geq E_p \longrightarrow \begin{cases} \text{libre si } x \in [x_{min}, \infty[\\ \text{lié si } x \in [x_1, x_2] \end{cases}$

III.2) Equilibre, stable ou instable

a) Définitions

b) Lien avec l'énergie potentielle

- Position d'équilibre $\left.\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_{eq}} = 0$
- Position d'équilibre stable $\left.\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_{eq}} = 0$ et $\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_{eq}} > 0$ mini d'Ep.
- Position d'équilibre instable $\left.\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_{eq}} = 0$ et $\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_{eq}} < 0$ maxi d'Ep

III.3) Petits mouvements autour d'un équilibre stable

dvlpt de Taylor : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x_{eq}) + \underbrace{\left.\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_{eq}}}_{=0}(x - x_{eq}) + \frac{1}{2}\underbrace{\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_{eq}}}_{k>0}(x - x_{eq})^2 = \text{cste}$

$\xrightarrow{d/dt}$ $\ddot{x} + \frac{k}{m}(x - x_{eq}) = 0$ (osc. harm.)

III.4) Cas d'une barrière de potentiel

III.5) Compléments : lien avec le portrait de phase

IV) TEC pour un système de plusieurs points matériels

$\frac{dE_c}{dt} = \sum_k \mathcal{P}(\vec{F_k}) = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$ (puissances de toutes les forces, ext. et int., C et NC)

V) Exercices

VI) Capacité numérique

(μ) $\vec{\mathrm{grad}}\,f \begin{vmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{vmatrix}$ en cartésiennes ; $\vec{\mathrm{grad}}\,f \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$ en cyl. ; $\vec{\mathrm{grad}}\,f \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$ en sph.