Chapitre 18 : Mouvement dans un champ de force centrale conservatif. Champs newtoniens

I) Force centrale conservative

Introduction

a) Définition $\vec{F} = F(r)\vec{u_r} = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u_r} = -\overrightarrow{grad}\,E_p$

b) Exemples Gravitation, Coulomb $\left(\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{u_r}\ ;\ E_p = -\frac{K}{r}\right)$; élastique

I.1) Conséquence du caractère central de la force : mouvement plan et loi des aires

a) Conservation du moment cinétique $\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{\sigma}_O(\vec{F}) = \vec{OM}\wedge\vec{F} = \vec{0} \rightarrow \vec{L_O} = cste$

b) Mouvement plan $\vec{L_O} = \vec{OM}\wedge m\vec{v} = \vec{cste} \rightarrow \vec{OM} \perp \vec{L_O}$

c) Le mouvement suit la loi des aires $\vec{L_O} = r\vec{u_r}\wedge m(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\vec{u_z}$

$\mathcal{C} = r^2\dot{\theta} = cste$ et $V_a = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = cste$: OM balaie des aires égales pendant des durées égales

I.2) Conséquence du caractère conservatif de la force

a) Conservation de l'énergie mécanique $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F_{NC}}) = 0 \rightarrow E_m = cste$

b) Etude qualitative du mouvement radial

- Energie potentielle effective $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{\mathcal{C}^2}{r^2} + E_p(r)}_{E_{peff}(r)}$
- Etats libre ou lié

c) Approche documentaire : expérience de Rutherford

II) Cas particulier de l'attraction gravitationnelle

II.1) Lois de Képler (orbites, aires, période) $T^2/a^3 = 4\pi^2/GM_S$

II.2) Etude qualitative du mouvement radial (nature de la trajectoire selon E_m) $E_m > 0$ hyperbole ; $E_m = 0$ parabole | $E_0 < E_m < 0$ ellipse ; $E_m = E_0$ cercle

II.3) Expression de l'énergie mécanique en fonction du demi-grand axe a de l'ellipse pour les mouvements elliptiques $E_m = -\frac{GM_A m}{2a} < 0$

II.4) Cas particulier du mouvement circulaire

a) Montrer que le mouvement est uniforme et trouver la vitesse $m\vec{a} = m\left(-\frac{v^2}{r_0}\vec{u_r} + \frac{dv}{dt}\vec{u_\theta}\right) = -\frac{GM_A m}{r^2}\vec{u_r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_A}{r_0}}$

b) Période ? $v = 2\pi r_0/T$

c) E_c et E_p en fonction de E_m ? $E_m = -GM_A m/2r_0 = E_p/2 = -E_c < 0$

d) Satellite géostationnaire : définition, caractéristique, période, altitude $h \simeq 36.10^3$ km. $T_{sid} \simeq T_{sol} = 24$ h

e) Vitesses cosmiques :

- Vitesse minimale de mise en orbite ou 1ère vitesse cosmique $r_0 \simeq R_T \rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$ (avec 1 PFD)
- Vitesse de libération ou 2ème vitesse cosmique $E_m = 0 \rightarrow v_2 = \sqrt{2}\,v_1$

III) Exercices

On peut retenir

- équation polaire d'une conique de paramètre p et d'excentricité e $r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} = OM$
- nature de la trajectoire selon les valeurs de l'excentricité e

$$\left.\begin{array}{ll} e > 1 & : \text{hyperbole} \\ e = 1 & : \text{parabole} \\ 0 \leq e < 1 & : \text{ellipse } (e = 0, \text{ cercle}) \end{array}\right\} \text{de foyer O}$$