Chapitre 5 : Oscillateur harmonique

Oscillateur harmonique = oscillateur sinusoïdal

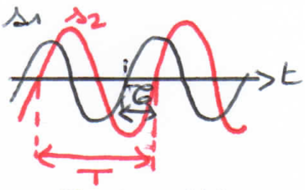
I) Signal sinusoïdal

s(t) = $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = C\cos(\omega t+\varphi)$ avec $C=\sqrt{A^2+B^2}$

$\langle s\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,dt$ ici $\langle s\rangle = 0$

$S_{eff} = \sqrt{\langle s^2(t)\rangle} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,dt\right)^{1/2} = S_{RMS}$ (Root Mean Square) ici $S_{eff} = \frac{C}{\sqrt{2}}$

Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux
de même fréquence



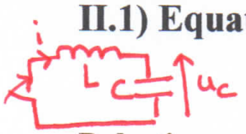
Ici $s_2(t)$ est en retard sur $s_1(t)$ $\rightarrow$ $\varphi<0$

$\lvert\varphi\rvert$	2π
τ	T

$|\varphi| = \frac{2\pi\tau}{T} = 360°\frac{\tau}{T}$

II) Exemple du circuit LC

II.1) Equation différentielle en $u_c(t)$ et en $i(t)$



$\frac{d^2u_c}{dt^2}+\omega_0^2u_c(t)=0$ et $\frac{d^2i}{dt^2}+\omega_0^2 i(t)=0$

Pulsation propre : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ Période propre : $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$

II.2) Résolution

$u_c(t) = A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$

Si CI : $u_c(0^+)=U_0$ et $i(0^+)=0$ alors $u_c(t)=U_0\cos(\omega_0 t)$

II.3) Bilan énergétique

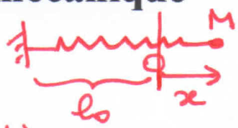
Montrer que $E_{élec} + E_{magn}$ = cste $=\frac{1}{2}CU_0^2$ ici (pas d'effet dissipatif (Joule))

Tracer $E_{élec}$ et E_{magn} en fonction du temps (période $T_0/2$)

III) Exemple d'un oscillateur harmonique mécanique

III.1) Système étudié = masse-ressort

$\vec{F_R} = -k(\ell-\ell_0)\vec{u_x} = -kx\,\vec{u_x}$



III.2) Equation différentielle

$\ddot{x}+\omega_0^2x(t)=0$

Pulsation propre : $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

III.3) Résolution

CI : $\begin{cases}x(0)=x_0\\ \dot x(0)=v_0\end{cases}$

$x(t)=x_0\cos(\omega_0 t)+\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

$x(t) = X_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$ avec $X_0=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$

III.4) Bilan énergétique

Montrer que E_m = cste $=\frac{1}{2}kX_0^2$ (pas d'effet dissipatif (frottement))

Tracer E_m, E_p, E_c en fonction du temps $E_c=\frac{1}{2}m\dot x^2$ et $E_p=\frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2$

Exercice : établir l'équation différentielle du paragraphe III.2) en dérivant E_m=cste

$E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\dot x^2+\frac{1}{2}kx^2 = \text{cste} \longrightarrow \frac{dE_m}{dt}=m\dot x\ddot x+kx\dot x=0 \xrightarrow[\dot x\neq 0]{} \ddot x+\omega_0^2 x=0$

IV) Définition d'un oscillateur harmonique

$\ddot x+\omega_0^2x(t)=0$

V) Exercices