



Lycée Privé Sainte Geneviève

Épreuve de classement de fin d'année 2018



Première composition de physique – Lundi 18 juin 2018 – 4 heures

Sujet PCSI



**L'utilisation d'une calculatrice ou d'un ordinateur est interdite.**

**Aucun document n'est autorisé.**

**La résonance magnétique nucléaire :  
une technologie de pointe au service de la physique, de la chimie  
et de la médecine**

**Consignes aux candidats**

- Avant de commencer à composer, le candidat doit s'assurer de disposer du sujet correspondant à sa filière. Il doit vérifier également que son sujet est complet. Ce sujet comporte 10 pages, y compris celle-ci.
- Si, au cours de sa composition, un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en précisant les éventuelles initiatives qu'il est amené à prendre.
- Le candidat prendra soin de numéroter ses copies, de reporter précisément le numéro des questions qu'il aborde, et d'indiquer sur chaque copie son numéro d'anonymat. Le nom du candidat ne doit pas apparaître sur la copie, ni sa classe.
- L'utilisation des calculatrices étant interdite, le correcteur valorisera significativement l'effort des candidats qui auront effectué les applications numériques demandées (avec une tolérance de 10% sur la valeur du résultat final).
- Certaines questions ne sont pas guidées. Ces questions demandent de la part du candidat de l'initiative dans la pratique du raisonnement scientifique. Le temps nécessaire au questionnement et à la recherche des réponses est pris en compte dans le barème qui leur est dévolu. Ces questions sont repérées par une double barre en marge (comme ci-contre).

Ce sujet aborde le principe physique de la spectroscopie de Résonance Magnétique Nucléaire (RMN). Le phénomène de résonance magnétique nucléaire a été mis en évidence pour la première fois par Isidor Isaac Rabi en 1938 (prix Nobel de physique en 1944) et les premières mesures de RMN proprement dite (avec détection de la résonance magnétique nucléaire par induction magnétique) ont été réalisées indépendamment en 1945-6 par Félix Bloch et Edward Mills Purcell, qui ont reçu le prix Nobel de physique en 1952. Cette spectroscopie a rapidement donné lieu à de nombreux développements permettant de riches applications dans les domaines les plus divers. Elle est en particulier utilisée maintenant de manière très courante dans les laboratoires et les industries chimiques (au sens large) pour l'identification, la caractérisation et la quantification de molécules en solution, mais aussi de matériaux solides. L'importance de cet outil dans le domaine de la recherche a justifié l'attribution de deux prix Nobel de chimie (1991 et 2002). Elle a par ailleurs donné naissance à la technique d'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM), d'usage courant dans les hôpitaux et récompensée par un prix Nobel (2003) de physiologie et médecine.

### Constantes fondamentales

- Constante de Boltzmann :  $k_B = 1,381.10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
- Constante de Planck :  $h = 6,626.10^{-34} \text{ J.s}$
- Constante de Planck réduite :  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055.10^{-34} \text{ J.s}$
- Perméabilité du vide :  $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ T.m.A}^{-1}$
- Charge élémentaire :  $e = 1,602.10^{-19} \text{ C}$
- Masse du proton :  $m_p = 1,673.10^{-27} \text{ kg}$
- Masse de l'électron :  $m_e = 9,109.10^{-31} \text{ kg}$
- Nombre d'Avogadro :  $N_A = 6,022.10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- 1 gauss (1 G) :  $10^{-4} \text{ T}$

### Données thermodynamiques (à pression égale à 1 bar)

- température de liquéfaction du diazote : 77 K
- température de liquéfaction de l'hélium  ${}^4_2\text{He}$  : 4,0 K
- enthalpie massique de vaporisation du diazote : 199 kJ.kg<sup>-1</sup>
- enthalpie massique de vaporisation de l'hélium  ${}^4_2\text{He}$  : 21 kJ.kg<sup>-1</sup>
- masse volumique du diazote : 0,808 kg.L<sup>-1</sup> au point d'ébullition du liquide
- masse volumique de l'hélium  ${}^4_2\text{He}$  : 0,125 kg.L<sup>-1</sup> au point d'ébullition du liquide

### Valeur numérique

- $\sqrt{2} \approx 1,414$

### Notation

On notera  $\tanh$  la fonction *tangente hyperbolique*. On rappelle que  $\forall x \in \mathbb{R}, \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

**Les quatre parties de ce problème sont entièrement indépendantes.**

**Elles peuvent être abordées dans un ordre indifférent.**

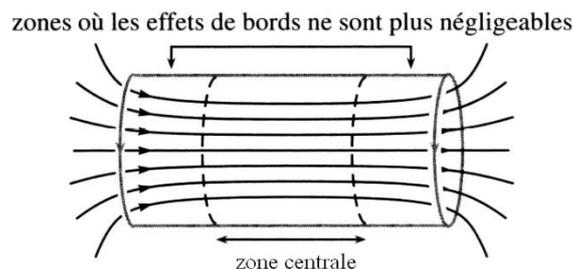
**Au sein des différentes parties, beaucoup de sous-parties sont indépendantes.**

## Première partie : Génération du champ magnétique $\vec{B}_0$

La résonance magnétique nucléaire est une propriété de certains noyaux atomiques (possédant un « spin nucléaire » non nul). Lorsqu'ils sont placés dans un champ magnétique et soumis à un rayonnement électromagnétique (du domaine des radiofréquences), ils sont susceptibles, si les conditions de résonance sont réunies, d'absorber l'énergie du rayonnement puis de la relâcher par relaxation. L'énergie mise en jeu dépend de l'intensité du champ magnétique  $\vec{B}_0$  appliqué, mais aussi de l'environnement du noyau considéré (autres atomes présents à proximité).

1. Donner le nom de deux physiciens dont les travaux ont porté, au XIX<sup>ème</sup> siècle, sur les ondes électromagnétiques. Donner un ordre de grandeur typique de la fréquence des radiofréquences.

On cherche à produire un champ magnétique très intense  $\vec{B}_0$  à l'aide d'un solénoïde long d'axe ( $Oz$ ), de rayon  $R = 25$  cm et de longueur  $L = 2,5$  m. Sur la figure ci-dessous, on a représenté l'allure des lignes de champ obtenues pour un tel solénoïde.



2. Quelle information sur le champ à l'intérieur de la zone centrale peut-on déduire de l'allure des lignes de champ ?

On admet que dans la zone centrale, l'expression du champ  $\vec{B}_0$  est bien approchée par l'expression du champ magnétique créé par un solénoïde infini.

3. On souhaite créer un champ magnétique d'intensité  $\|\vec{B}_0\| = 3,0$  T avec un fil de cuivre de section circulaire (de cuivre)  $S = 2,0$  mm<sup>2</sup>, recouvert d'un isolant de telle sorte que le diamètre du fil recouvert soit égal à  $d = 2,0$  mm. La longueur totale du fil est égale à  $\ell = 23$  km, sa résistance électrique est égale à  $R = 192$   $\Omega$ . Calculer la puissance dissipée par effet Joule dans le fil. Comparer cette puissance à des ordres de grandeur de puissances électriques que vous connaissez (dans le secteur domestique ou industriel) et que vous citerez explicitement. Conclure.

On remplace donc le cuivre par un alliage supraconducteur niobium-titane.

4. Quelle propriété physique des supraconducteurs souhaite-t-on exploiter ici ? Quelle difficulté pratique rencontre-t-on lorsqu'on emploie un matériau supraconducteur ?

Le cryostat où se déroule l'expérience de RMN est double : une enveloppe remplie de diazote liquide (à 77 K) entoure l'enceinte d'hélium (à 4,0 K) dans laquelle se trouve le bobinage supraconducteur. On alimente le cryostat à l'aide de 40 litres de diazote chaque semaine et à l'aide de 50 litres d'hélium par période de 4 semaines.

5. Pourquoi doit-on remplir régulièrement le cryostat à l'aide des gaz liquéfiés ? Évaluer la puissance thermique reçue par la bobine supraconductrice d'après les volumes de gaz liquéfiés utilisés. Conclure sur l'intérêt d'utiliser des supraconducteurs plutôt qu'un bobinage classique en cuivre.
6. Connaissez-vous une autre solution technique permettant de générer sans effet thermique un champ magnétique permanent ? Quel ordre de grandeur de champ magnétique pourrait-on atteindre avec cette solution ?

## Deuxième partie : Effet du champ magnétique

On mène l'étude qui suit dans le référentiel ( $\mathcal{R}$ ) du laboratoire. Dans le référentiel ( $\mathcal{R}$ ), on définit un repère orthonormé direct fixe  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  et on note  $(Ox, Oy, Oz)$  les trois axes correspondants.

Dans le référentiel ( $\mathcal{R}$ ), chaque noyau atomique possède un moment cinétique intrinsèque, noté ici  $\vec{\sigma}$ , lié à son spin et qui peut être relié à son moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  par la relation  $\vec{\mathcal{M}} = \gamma \vec{\sigma}$ .  $\gamma$  s'appelle *le rapport gyromagnétique* du noyau atomique considéré. On donne les valeurs numériques de  $\gamma$  pour le noyau d'hydrogène  ${}^1_1\text{H}$  et pour le noyau de phosphore  ${}^{31}_{15}\text{P}$  :

- $\gamma_H = 26,8.10^7 \text{ rad.T}^{-1}.\text{s}^{-1}$
- $\gamma_P = 10,8.10^7 \text{ rad.T}^{-1}.\text{s}^{-1}$

Dans tout ce qui suit, on néglige la pesanteur. On rappelle qu'un moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  placé dans un champ magnétique  $\vec{B}_0$  uniforme et permanent subit une action mécanique conservative, dont l'énergie potentielle associée s'écrit  $E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_0$ , et qui se traduit par un couple  $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_0$ .

### Questions préliminaires

7. Définir la notion de *référentiel*, puis définir un *référentiel galiléen*. Sur la base de quel(s) critère(s) peut-on ici affirmer que le référentiel ( $\mathcal{R}$ ) constitue dans les conditions de l'étude une bonne approximation d'un référentiel galiléen ?
8. À quelle condition le moment magnétique placé dans le champ extérieur uniforme et permanent est-il en équilibre stable ?

### Étude classique de la précession de Larmor

Dans cette partie, la direction initiale de  $\vec{\mathcal{M}}$  est supposée quelconque.  $\vec{B}$  est uniforme et est porté par l'axe ( $Oz$ ) :  $\vec{B} = \vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ .

9. a. Appliquer le théorème du moment cinétique à un noyau atomique de moment cinétique  $\vec{\sigma}$ . En déduire que  $\|\vec{\mathcal{M}}\|$  ne dépend pas du temps.  
b. Montrer que  $\mathcal{M}_z = \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{u}_z$  est une constante.  
c. En déduire que l'angle  $\theta$  entre  $\vec{\mathcal{M}}$  et  $\vec{B}_0$  est constant. On prendra  $\theta \in [0, \pi]$  dans la suite.  
d. Montrer que l'extrémité du vecteur  $\vec{\mathcal{M}}$  décrit un cercle. Déterminer le rayon de ce cercle en fonction de  $\theta$  et de  $\|\vec{\mathcal{M}}\|$ .

Pour tout vecteur  $\vec{A}$  en rotation à la vitesse angulaire  $\omega_0$ , il existe un vecteur rotation (ou vecteur vitesse angulaire)  $\vec{\omega}_0$  qui vérifie  $\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{A}$ . Le mouvement étudié à la question précédente s'appelle **un mouvement de précession**.

10. Exprimer en fonction de  $\gamma$  et  $\vec{B}_0$  le vecteur rotation associé à la précession du noyau atomique.
11. Calculer la valeur des fréquences  $f_{0H}$  et  $f_{0P}$  de précession des protons pour  $B_0 = 3,0 \text{ T}$ . L'ordre de grandeur obtenu est-il cohérent avec la réponse à la question 1 ?
12. Connaissez-vous d'autres manifestations de phénomènes de précession à l'échelle macroscopique ? Qu'appelle-t-on *la précession des équinoxes* ?

## Approche quantique et statistique du phénomène d'aimantation des noyaux

La mécanique quantique permet de montrer que la composante  $\sigma_z$  du moment cinétique de spin  $\vec{\sigma}$  du noyau d'hydrogène (appelé par la suite *proton*) ne peut prendre que les valeurs  $\pm \frac{\hbar}{2}$ ,  $\hbar$  étant la constante de Planck réduite (cf. données en début d'énoncé). On dit que le proton présente un spin nucléaire  $\frac{1}{2}$  dont la projection peut prendre deux valeurs  $\frac{1}{2}$  et  $-\frac{1}{2}$ . On rappelle que l'on a  $\mathcal{M}_z = \gamma \sigma_z$ .

L'étude porte sur un ensemble de protons identiques discernables, d'interactions mutuelles très faibles, soumis au champ  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$  et peuplant les deux états d'énergie correspondant aux deux valeurs possibles de  $\sigma_z$ .

Ce peuplement s'effectue selon la loi statistique de Maxwell-Boltzmann, que l'on rappelle ici : soit  $E_i$  l'énergie d'un état, alors le nombre de particules occupant cet état (ou niveau de peuplement)  $N_i$  est proportionnel à  $e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$  avec  $k_B$  la constante de Boltzmann.

13. Exprimer l'écart d'énergie entre les deux états de spins.

L'apparition de cet écart d'énergie en présence d'un champ magnétique est appelé l'effet Zeeman.

14. a. Tracer l'énergie des niveaux associés à ces états en fonction de  $B_0$ .  
b. Que remarque-t-on au sujet de la fréquence qui serait associée à une transition radiative entre ces deux états ? Comparer avec la partie précédente.

On note  $N$  le nombre total, très grand, de protons étudiés et  $N^+$  (resp.  $N^-$ ) celui des protons pour lesquels  $\sigma_z$  vaut  $\frac{\hbar}{2}$  (resp.  $-\frac{\hbar}{2}$ ).

15. a. En utilisant la statistique de Maxwell-Boltzmann, déterminer le quotient  $\frac{N^+}{N^-}$  en fonction de  $B_0, \gamma, T, \hbar$  et  $k_B$ .  
b. En déduire les expressions de  $N^+$  et de  $N^-$  en fonction de  $N$  et de  $x' = \frac{\gamma \hbar B_0}{k_B T}$ .  
c. Vérifier la pertinence de ces deux expressions pour  $x' \rightarrow 0$  et  $x' \rightarrow \infty$ . Pour cela, on les interprétera par rapport aux variations correspondantes de  $B_0$  et  $T$  qui sont susceptibles d'amener à ces cas limites.

Dans les questions 16 à 19,  $\vec{\mathcal{M}}$  désigne la somme des moments magnétiques de  $N$  noyaux d'hydrogène (« protons »), et  $\vec{\mathcal{M}}_0$  désigne désormais sa valeur à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ , en présence du champ magnétique  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ .

16. Expliquer que  $\vec{\mathcal{M}}_0$  est orienté uniquement selon l'axe  $\vec{u}_z$  et non affecté par la précession décrite précédemment autour du champ permanent  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ .  
17. Montrer que  $\vec{\mathcal{M}}_0 = \frac{N \gamma \hbar}{2} \tanh\left(\frac{x'}{2}\right) \vec{u}_z$  (se référer au formulaire en début d'énoncé pour la définition de  $\tanh$ ).  
18. On donne  $T = 300$  K et  $B_0 = 3,0$  T. Évaluer numériquement  $x'$ . En déduire une expression simplifiée de  $\vec{\mathcal{M}}_0$  en fonction de  $N, \gamma, \hbar, x'$  et de  $\vec{u}_z$  puis de  $N, \gamma, \hbar, B_0, k_B, T$  et de  $\vec{u}_z$ .  
19. En utilisant l'**expression approchée** de la question précédente :  
a. Commenter l'évolution de  $\vec{\mathcal{M}}_0$  avec  $B_0$ .  
b. Commenter l'évolution de  $\vec{\mathcal{M}}_0$  avec  $T$ .

## Étude de la relaxation

On note désormais  $\vec{\mathcal{M}}_0$  le moment magnétique d'un noyau à l'équilibre. On a donc  $\vec{\mathcal{M}}_0 = \mathcal{M}_0 \vec{u}_z$ . Lors de l'étude par spectroscopie RMN, on utilise une impulsion radiofréquence (non étudiée dans ce problème) qui permet de faire « basculer » rapidement le moment orbital  $\vec{\mathcal{M}}$  sur une direction du plan ( $xOy$ ). Lors de ce basculement, la norme de  $\vec{\mathcal{M}}$  est conservée. On peut donc, pour simplifier l'étude, supposer qu'à l'instant  $t = 0$ , juste après l'impulsion, le moment  $\vec{\mathcal{M}}$  vaut  $\vec{\mathcal{M}}(t = 0) = -\mathcal{M}_0 \vec{u}_y$ .

À un instant où  $\vec{\mathcal{M}}(t)$  n'est pas à l'équilibre, on note  $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_z \vec{u}_z + \vec{\mathcal{M}}_\perp$ , la composante  $\vec{\mathcal{M}}_\perp$  étant la composante transversale du moment magnétique.

Le retour à l'équilibre du moment magnétique est régi par l'équation différentielle suivante, dite équation de Bloch, où  $T_1$  et  $T_2$  sont des temps caractéristiques :

$$\frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} = -\gamma \vec{B}_0 \wedge \vec{\mathcal{M}} + \frac{\vec{\mathcal{M}}_0 - \mathcal{M}_z \vec{u}_z}{T_1} - \frac{\vec{\mathcal{M}}_\perp}{T_2}$$

20. En utilisant une projection judicieusement choisie, trouver l'équation différentielle vérifiée par  $\mathcal{M}_z(t)$ . La résoudre en tenant compte des conditions initiales données. Représenter  $\mathcal{M}_z(t)$ .
21. Vérifier que la solution suivante :  $\vec{\mathcal{M}}_\perp = -\mathcal{M}_0 e^{-\frac{t}{T_2}} (\sin(\omega_0 t) \vec{u}_x + \cos(\omega_0 t) \vec{u}_y)$  satisfait l'équation de Bloch. Quelle courbe plane l'extrémité du vecteur  $\vec{\mathcal{M}}_\perp$  décrit-elle ? La représenter.

## Étude de la tension électromotrice (ou « force électromotrice ») induite

On suppose que tous les moments magnétiques de l'échantillon étudié se trouvent sur l'axe d'une bobine fixe dans le référentiel d'étude ( $\mathcal{R}$ ), d'axe orienté supposé confondu avec ( $Ox$ ). Cette bobine est un des éléments du circuit de détection qui sera étudié dans la troisième partie.

Le flux du champ magnétique créé par les  $N$  protons à travers l'ensemble des spires orientées de la bobine est donné par la relation  $\phi = k \mathcal{M}_x$ , où  $k$  est une constante (dimensionnée) strictement positive dont la valeur ne dépend que de paramètres géométriques.

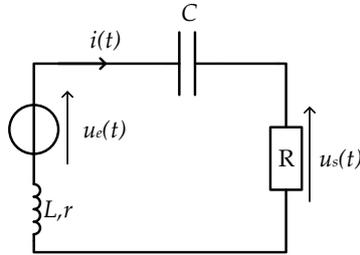
22. Les dimensions du circuit de détection sont de l'ordre du décimètre et la fréquence de précession est voisine de  $f_0 = 50$  MHz. Peut-on considérer que l'on est dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) ?
23. Quelles sont les types de situations physiques dans lesquelles on peut rencontrer le phénomène d'induction électromagnétique ? Quel physicien a mis en évidence ces phénomènes ? Citer la loi qui porte son nom, ainsi qu'une date approximative (le demi-siècle) de sa découverte.

On rappelle que  $\mathcal{M}_x = -\mathcal{M}_0 e^{-\frac{t}{T_2}} \sin(\omega_0 t)$  et on admet que  $T_2$  est de l'ordre de grandeur de la seconde.

24. Déterminer l'expression de la tension électromotrice  $e(t)$  (« force électromotrice ») qui apparaît dans le circuit de la bobine en fonction de  $k, \mathcal{M}_0, \omega_0, T_2$ .
25. a. Justifier la validité de l'expression simplifiée suivante :  $e(t) = k \mathcal{M}_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t) e^{-\frac{t}{T_2}}$ .  
b. En déduire la dépendance de l'amplitude de  $e(t)$  selon la valeur de  $\gamma$  et de  $B_0$ .  
c. Expliquer pourquoi on travaille avec des spectromètres RMN de  $B_0$  de plus en plus grand.

## Troisième partie : Etude du circuit de détection

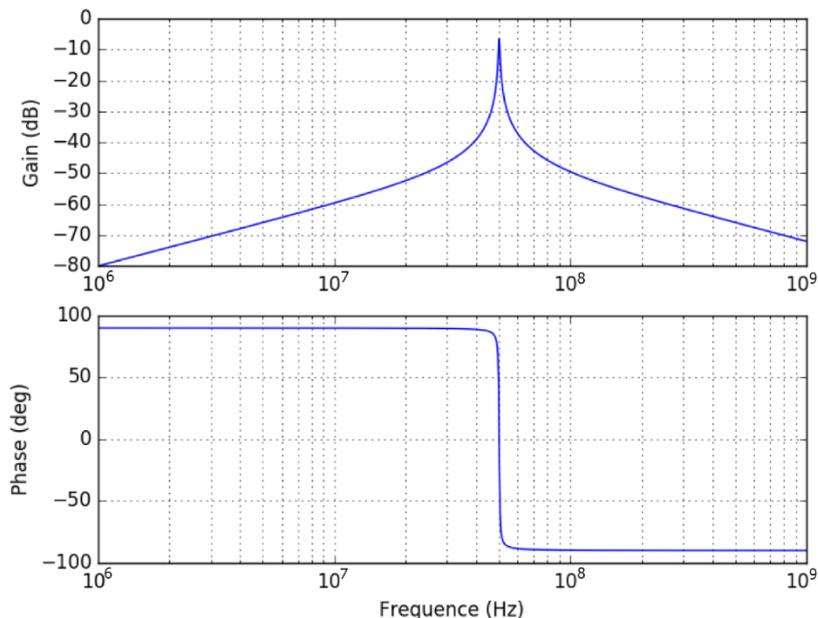
La bobine ( $L, r$ ) de détection évoquée dans la partie précédente s'insère dans un circuit électronique de filtrage que l'on peut modéliser par un circuit de type RLC série.  $r$  est la résistance interne de la bobine et  $L$  son inductance propre.  $R$  est une résistance et  $C$  est la valeur de la capacité d'un condensateur idéal. On note  $R_{tot} = r + R$ .

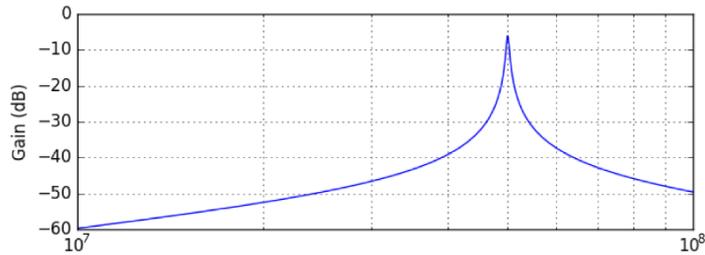


$u_e(t)$  désigne une source idéale de tension qui vérifie :  $u_e(t) = E \cos(\omega t)$ . On étudie la réponse  $u_s(t)$  du filtre à cette entrée, en régime sinusoïdal établi.

26. En hautes et basses fréquences, à quoi sont équivalents le condensateur et la bobine ? En déduire la nature probable du filtre étudié.
27. Exprimer la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{U_s}{U_e}$  en fonction de  $R, R_{tot}, L, C$  et  $\omega$ .
28. Mettre cette fonction de transfert sous la forme  $\underline{H}(j\omega) = \frac{a}{1+jb\left(\frac{\omega}{s_0} - \frac{s_0}{\omega}\right)}$  avec  $s_0 = \omega\sqrt{LC}$ . Déterminer les expressions de  $a$  et  $b$ .
29. a. Rappeler la signification physique de  $H = |\underline{H}|$ . Quelle est sa valeur maximale  $H_{max}$  ? A quelle pulsation cette valeur est-elle atteinte ?  
 b. Déterminer l'écart  $\Delta\omega$  entre les deux pulsations de coupure définies par  $H(\omega) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$  en fonction de  $b, L$  et  $C$ .  
 c. Définir le facteur de qualité  $Q$  du filtre et rappeler sa dimension. Établir son expression en fonction des grandeurs physiques du circuit.

On a tracé à l'aide de SCILAB™ le diagramme de Bode de ce filtre. Les courbes obtenues sont données ci-dessous. On a utilisé comme paramètres du filtre :  $f_0 = 5.10^7$  Hz et  $Q = 1.10^2$ .





30. Quelle est la valeur du gain (en dB) à la pulsation propre du filtre ? Aux pulsations de coupure ? Donner les valeurs numériques des fréquences pour lesquelles l'atténuation par le filtre est 100 fois plus importante qu'à la fréquence propre.

Ici, on a fait en sorte que la pulsation propre du filtre soit exactement égale à la pulsation  $\omega_0$  de précession des noyaux de  $^{31}\text{P}$  (étudiée dans la seconde partie). Cette pulsation correspond à la pulsation du signal que l'on souhaite conserver en sortie du filtre.

31. En pratique, si l'incertitude sur  $C$  est de 3% et sur  $L$  est de 4%, quelle est l'incertitude obtenue sur la pulsation propre du filtre  $\omega_0$  ? Quel problème risque-t-on de rencontrer lors de la mise en œuvre du filtre ?

Le constructeur de la sonde a prévu de résoudre ce problème en remplaçant le condensateur  $C$  par un condensateur réglable (de capacité  $C$  ajustable par l'utilisateur). On dit que l'utilisateur *accorde* le système.

32. Expliquer quel paramètre physique dont dépend la capacité du condensateur peut être réglé pour réaliser cette opération d'accord. Expliquer pourquoi ce réglage doit être opéré à chaque utilisation de la machine.
33. On donne  $R_{tot} = 1,0 \Omega$ . Calculer les valeurs de  $L$  et de  $C$  (pour les valeurs des paramètres du filtre utilisées dans la simulation du diagramme de Bode précédent). Commenter.

Dans la suite de cette partie,  $u_e(t) = e(t)$ , tension électromotrice (ou « force électromotrice ») induite par la précession des noyaux atomiques. La forme du signal réel d'entrée  $e(t)$  correspond à des composantes de Fourier qu'on suppose, pour simplifier, centrées sur la pulsation  $\omega_0$  et localisées dans une bande de demi-largeur en pulsation égale à  $\frac{3}{T_2}$ .

34. Déterminer l'ordre de grandeur des valeurs de  $s - \frac{1}{s} = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$  aux extrémités de cette bande, sachant que  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  est de l'ordre de  $5.10^7$  Hz et  $T_2$  est de l'ordre de grandeur de la seconde.
35. a. À quelle valeur simple peut-on approximer  $\underline{H}(j\omega) = \frac{a}{1+jQ(s-\frac{1}{s})}$  pour toute pulsation présente dans le spectre de  $e(t)$  ?
- b. En déduire une relation simple entre  $u_s(t)$  et  $e(t)$ .

Pour  $t < 0$ ,  $e(t)$  est nulle et le condensateur est totalement déchargé. Pour  $t > 0$ ,  $e(t)$  a la forme démontrée dans la seconde partie, que l'on utilisera même si on ne l'a pas démontrée :  $e(t) = k\mathcal{M}_0\omega_0 \cos(\omega_0 t) e^{-\frac{t}{T_2}}$ .

En tenant compte des valeurs de  $T_2$  et de  $Q$ , on peut montrer que  $u_s(t)$  peut se mettre sous la forme approchée  $u_s(t) = ak\mathcal{M}_0\omega_0 \cos(\omega_0 t) \left[ e^{-\frac{t}{T_2}} - e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \right]$

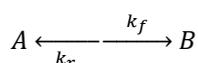
36. a. À quelle condition sur la date  $t$  peut-on négliger  $e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$  devant  $e^{-\frac{t}{T_2}}$  ?
- b. Sachant que la durée d'un enregistrement est généralement de l'ordre de quelques fois  $T_2$ , montrer que l'on peut considérer pendant tout l'enregistrement que l'on a  $u_s(t) = ak\mathcal{M}_0\omega_0 \cos(\omega_0 t) e^{-\frac{t}{T_2}}$ . Conclure sur l'intérêt du traitement du signal ainsi effectué.

## Quatrième partie : Détermination de constantes physico-chimiques *in vivo* par transfert d'aimantation RMN

Cette partie s'appuie sur les deux documents suivants.

Le *transfert d'aimantation*, en spectroscopie, permet de quantifier les échanges chimiques qui se produisent entre deux espèces chimiques discernables du spectre. L'idée de base consiste à annuler, à l'instant initial, le moment magnétique résultant (longitudinal et transversal) de l'une des espèces ; on parle alors de saturation. On étudie par la suite l'influence de cette saturation sur le moment magnétique résultant de l'autre espèce.

Considérons un atome  $X$  qui s'échange entre deux espèces chimiques  $A$  et  $B$  que l'on peut distinguer dans le spectre que l'on étudie. On figure cet échange par le formalisme suivant :



où  $k_f$  et  $k_r$  sont les constantes de réaction chimique (pseudo-constantes du premier ordre). Il ne s'agit pas à proprement parler de l'écriture d'une réaction chimique, puisqu'on ne fait figurer que les espèces qui échangent l'atome  $X$ .

Les équations de BLOCH (étudiées en seconde partie du problème) régissant les régimes transitoires du moment magnétique longitudinal des espèces  $A$  et  $B$  sont modifiées : les variations du moment de chaque espèce ne résultent plus seulement de la relaxation propre des spins nucléaires, mais également du transfert des spins d'une espèce à l'autre, ce qui provoque un *transfert d'aimantation*, proportionnel à la rapidité de l'échange décrit par ses constantes cinétiques  $k_f$  et  $k_r$ . Les équations de BLOCH deviennent :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{M}_z^A}{dt} = -\frac{\mathcal{M}_z^A - \mathcal{M}_0^A}{T_{1A}} - k_f \mathcal{M}_z^A + k_r \mathcal{M}_z^B \\ \frac{d\mathcal{M}_z^B}{dt} = -\frac{\mathcal{M}_z^B - \mathcal{M}_0^B}{T_{1B}} - k_r \mathcal{M}_z^B + k_f \mathcal{M}_z^A \end{cases}$$

On peut, par irradiation sélective, basculer complètement le moment magnétique de l'espèce  $B$  dans le plan transversal à partir de l'instant  $t = 0$  et la maintenir pour tout instant  $t \geq 0$  (on parle de saturation), alors on a les conditions :

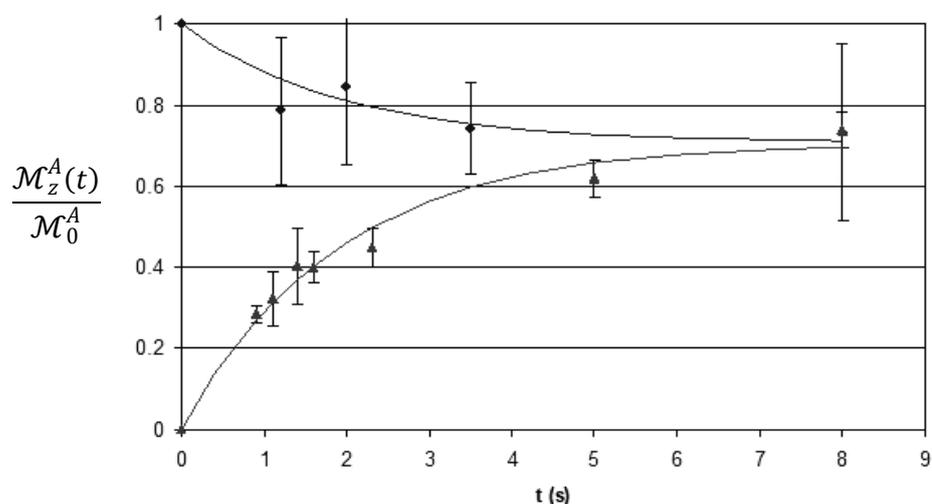
$$\begin{cases} \forall t \geq 0, \mathcal{M}_z^B = 0 \\ \mathcal{M}_z^A(t = 0) = \mathcal{M}_0^A \end{cases} \text{ (conditions [I])}$$

On peut également procéder à la même expérience en changeant la condition initiale :

$$\begin{cases} \forall t \geq 0, \mathcal{M}_z^B = 0 \\ \mathcal{M}_z^A(t = 0) = 0 \end{cases} \text{ (conditions [II])}$$

**Document 1 : le principe du transfert d'aimantation** (document rédigé d'après [4])

**Évolution du moment magnétique de l'espèce A en fonction de temps dans deux expériences de transfert d'aimantation *in vivo***



**Document 2 : Résultats expérimentaux obtenus lors d'une expérience de transfert d'aimantation ([5])**

*Les deux courbes correspondent à l'espèce A du document 1.*

*Les carrés (courbe supérieure) ◆ correspondent aux conditions [I] dans le document 1*

*et les triangles (courbe inférieure) ▲ correspondent aux conditions [II] du document 1.*

37. Résoudre l'équation de BLOCH (document 1) dans le cas des conditions [I] puis dans le cas des conditions [II]. On fera apparaître une constante de temps  $T_{1A}^*$  appelée le «  $T_{1A}$  apparent » que l'on exprimera en fonction de  $T_{1A}$  et  $k_f$ .
38. Dédurre du document 2 les valeurs de  $k_f$  et de  $T_{1A}$ . Proposer et justifier un ordre de grandeur de l'incertitude de mesure de ces deux grandeurs compte tenu de toutes les informations dont vous disposez.

FIN DE L'ÉPREUVE

**Bibliographie**

- [1] Concours commun Ecole Polytechnique – ENS de Paris-Saclay et Rennes, filière PSI, 2017
- [2] Concours commun Ecole Polytechnique – Écoles Normales Supérieures, filière MP, 2011
- [3] Concours commun Mines-Ponts, filière PC, 2002
- [4] Forsen S, Hoffman RA, « Study of Moderately Rapid Chemical Exchange Reactions by Means of Nuclear Magnetic Double Resonance », *Journal of Chemical Physics*, 1963
- [5] C. Wary, T.Naulet, *et al.*, « Splitting of Pi and other  $^{31}\text{P}$  NMR anomalies of skeletal muscle metabolites in canine muscular dystrophy », *NMR in biomedicine*, 2012

*Certaines figures illustrant cet énoncé sont issues de ces références bibliographiques et sont utilisées dans le respect du droit d'auteur.*