



Lycée Privé Sainte-Geneviève

Épreuve de classement de fin d'année 2018



Première composition de physique – Lundi 18 juin 2018 – 4 heures
Sujet PCSI



Éléments de correction

Première partie : Génération du champ magnétique \vec{B}_0

1. On peut citer Maxwell, Hertz, Branly. Les radiofréquences correspondent aux grandes ondes, aux ondes moyennes et aux ondes courtes. Typiquement de quelques centaines de kHz à quelques centaines de MHz.
2. Les lignes de champ sont rectilignes et parallèles, donc le champ magnétique est uniforme.
3. L'expression du champ magnétique créé par un solénoïde infini s'écrit $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$, \vec{u}_z étant l'axe du solénoïde et l'intensité étant orientée en cohérence avec la règle de la main droite. n est le nombre de spires par mètre de solénoïde.

On veut calculer la puissance perdue par effet Joule : $\mathcal{P} = RI^2$. On a donc $\mathcal{P} = R \times \frac{\|\vec{B}_0\|^2}{n^2 \mu_0^2}$.

Pour calculer le nombre total N de spires, on fait l'approximation que toutes les spires font 25 cm de rayon. En toute rigueur, ce n'est pas vrai puisqu'on va superposer des couches de spires les unes sur les autres. On vérifiera *a posteriori* la validité de cette approximation.

La longueur d'une spire est donnée par $\ell_s = 2\pi r \approx 1,6$ m.

Sur toute la longueur du solénoïde (une couche de spires), on réalise 1250 spires jointives (2,50 m avec un fil d'épaisseur 2 mm). On utilise donc 2 km de fil par couche de spires.

Il y a $\ell = 23$ km de spires. On va donc réaliser environ 11 couches. Ainsi, la couche la plus externe a un rayon de 27 cm, ce qui ne change pas grand-chose au calcul. L'approximation est validée.

Avec 11 couches de spires, on a donc $n = 11 \times \frac{1250}{2,5} = 5,5 \cdot 10^3$ spires.m⁻¹.

Il reste à calculer \mathcal{P} , d'après la formule donnée plus haut :

$$\mathcal{P} = 1,92 \cdot 10^2 \times \frac{9}{5,5^2 \times 10^6 \times 16\pi^2 \times 10^{-14}}$$

On trouve un ordre de grandeur :

$$\boxed{\mathcal{P} \approx 4 \cdot 10^7 \text{ W}}$$

Cet ordre de grandeur est colossal, d'autant plus qu'il nécessite d'être maintenu aussi longtemps qu'on a besoin du champ magnétique. 40 MW, cela représente la puissance de 4 rames de TGV à pleine puissance motrice (c'est-à-dire en phase d'accélération). C'est également la puissance nominale produite par une dizaine d'éoliennes dans des conditions favorables.

On ne peut pas retenir cette solution : une puissance thermique aussi importante dans un volume relativement contraint conduirait rapidement à la destruction du bobinage (la température de fusion du cuivre est de l'ordre de 1085°C).

4. La résistance d'un matériau supraconducteur est rigoureusement nulle, il n'y a pas de pertes par effet Joule. Les matériaux supraconducteurs ne se comportent comme tels qu'en-deça d'une certaine température-seuil, inférieure à la température ambiante. A température ambiante, on ne peut donc pas utiliser de matériau supraconducteur.

5. Il existe une différence de température entre le cryostat et l'air de la pièce. Donc, malgré une bonne isolation, des transferts thermiques existent toujours, de l'air de la pièce vers le cryostat. Cet apport d'énergie thermique provoque la vaporisation des gaz liquéfiés. Il faut donc les renouveler régulièrement. Le transfert thermique ne provient pas du bobinage lui-même, la conduction électrique ne provoque rigoureusement aucune perte dans le matériau supraconducteur.

Pour réaliser un calcul en ordre de grandeur, on considère qu'une masse m de gaz s'évapore de manière isobare à la température d'équilibre liquide vapeur. Le transfert thermique positif reçu de l'extérieur s'écrit donc :

$$Q = m\mathcal{L}_{vap}$$

Il suffit de convertir les grandeurs de l'énoncé, données en volume par unité de temps, pour passer aux puissances :

$$\mathcal{P} = \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{N_2} \times \mu_{N_2} \times \mathcal{L}_{vap}(N_2) + \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{He} \times \mu_{He} \times \mathcal{L}_{vap}(He)$$

L'application numérique donne (en laissant les volumes en L et les masses volumiques en kg.L⁻¹) :

$$\mathcal{P} = \frac{40}{7 \times 86400} \times 0,808 \times 199 \times 10^3 + \frac{50}{4 \times 7 \times 86400} \times 0,125 \times 21 \times 10^3$$

$$\boxed{\mathcal{P} \approx 10 \text{ W}}$$

Ce transfert thermique est très faible (ordre de grandeur des pertes thermiques d'une ampoule électrique), ce qui s'explique par l'excellente isolation du cryostat. En utilisant un matériau supraconducteur, on obtient un champ magnétique permanent très intense avec un dispositif très économe en énergie.

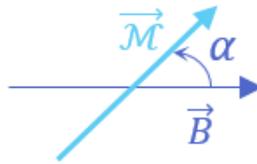
6. Un aimant permanent génère sans effet thermique un champ magnétique permanent. Avec cette solution, on peut obtenir un champ magnétique relativement intense (de l'ordre de 0,1 T), mais on ne pourra pas atteindre 3 T. Surtout, même avec un aimant en U qui génère un champ magnétique à peu près uniforme dans l'entrefer, on ne pourra pas obtenir un champ uniforme dans une aussi grande région de l'espace qu'avec un solénoïde.

Deuxième partie : Effet du champ magnétique

Questions préliminaires

7. Un référentiel est un solide de référence muni d'une horloge permettant de décrire un mouvement dans l'espace et dans le temps. Un référentiel galiléen est défini par le principe d'inertie : il s'agit d'un référentiel au sein duquel tout point matériel isolé persévère en son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme si les forces qui s'exercent sur lui se compensent. Le référentiel du laboratoire peut être considéré comme galiléen avec une excellente approximation pour des expériences courtes ($T \ll 24$ h) et d'extension spatiale limitée ($d \ll R_T$) ce qui est bien le cas ici.

8. Dans un champ magnétique uniforme et permanent, la résultante des forces subies par le moment magnétique est nulle. En revanche, le moment magnétique subit un couple.



Le couple est nul si \vec{B} et \vec{M} sont colinéaires. L'équilibre est stable si les deux vecteurs sont colinéaires et de même sens (pour s'en convaincre mathématiquement, on peut écrire l'énergie potentielle $E_p = -\mathcal{M}B\cos(\alpha)$ avec les notations précédentes, et le minimum sur $]-\pi, \pi]$ est bien obtenu pour $\alpha = 0$).

Étude classique de la précession de Larmor

9. On utilise le théorème du moment cinétique en O : $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{M} \wedge \vec{B}_0$, d'où $\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \wedge \vec{B}_0$.

a. Le produit scalaire par \vec{M} fait apparaître la norme de \vec{M} :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} \cdot \vec{M} = \frac{1}{2} \frac{dM^2}{dt} = (\gamma \vec{M} \wedge \vec{B}_0) \cdot \vec{M} = 0 \text{ donc la norme de } \vec{M} \text{ ne dépend pas du temps.}$$

b. En projetant sur \vec{e}_z : $\frac{d\vec{M}}{dt} \cdot \vec{e}_z = \frac{dM_z}{dt} = \gamma (\vec{M} \wedge \vec{B}_0) \cdot \vec{e}_z = 0$ car \vec{B}_0 est colinéaire à \vec{e}_z . Donc M_z ne dépend pas du temps.

c. $\|\vec{M}\|$ est constante et $M_z = \vec{M} \cdot \vec{e}_z = \|\vec{M}\| \cos \theta$ également, donc $\cos(\theta)$ est constant.

L'angle θ entre \vec{M} et \vec{B}_0 est donc fixe.

d. Si on représente le vecteur \vec{M} avec l'origine en O , l'extrémité du vecteur est sur la sphère de centre O et de rayon $\|\vec{M}\|$. De plus, l'extrémité du vecteur qui fait un angle θ avec $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ est sur le cercle d'axe (Oz) et de rayon $\|\vec{M}\| \sin \theta$.

10. D'après le théorème du moment cinétique $\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \wedge \vec{B}_0 = (-\gamma \vec{B}_0) \wedge \vec{M}$.

Par identification avec $\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{M}$, on obtient donc le vecteur rotation $\boxed{\vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0}$.

11. On écrit $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\gamma B_0}{2\pi}$. On a donc $f_{OH} = \frac{26,8 \cdot 10^7 \times 3}{2 \times 3,14} = 130$ MHz et $f_{OP} = \frac{10,8 \cdot 10^7 \times 3}{2 \times 3,14} = 50$ MHz. On obtient bien des signaux situés dans le domaine des radiofréquences.

12. La précession est un phénomène que l'on observe par exemple sur une toupie en mouvement. L'axe de rotation propre de la Terre subit un mouvement de précession par rapport à un axe perpendiculaire au plan de l'écliptique : ce mouvement s'appelle la précession des équinoxes.

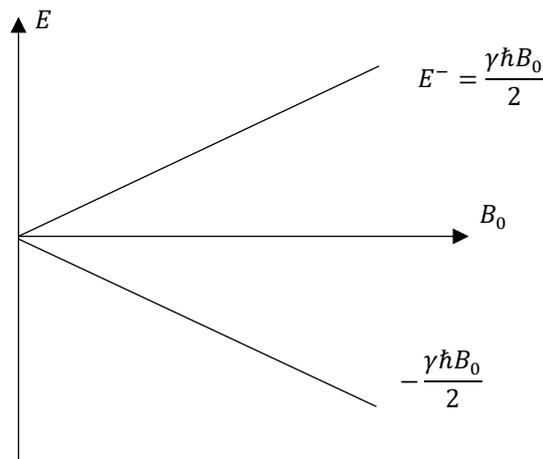
Approche quantique et statistique du phénomène d'aimantation des noyaux

13. Le moment cinétique de spin peut prendre deux valeurs $\sigma_z = \pm \frac{\hbar}{2}$. Donc le moment magnétique peut aussi prendre deux valeurs $\mathcal{M}_z = \gamma \sigma_z = \pm \frac{\gamma \hbar}{2}$.

Cela correspond aux deux niveaux d'énergie $E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_0 = -\mathcal{M}_z B_0$. Donc on a :

$$E^+ = -\frac{\gamma \hbar B_0}{2} \text{ et } E^- = +\frac{\gamma \hbar B_0}{2}. \text{ L'écart entre les deux niveaux d'énergie est donc } \boxed{\Delta E = -\gamma \hbar B_0}.$$

14. a. Les énergies varient proportionnellement à B_0 .



14.b. Une transition entre les deux niveaux d'énergie correspond à un photon d'énergie $|\Delta E| = h\nu$ où ν est la fréquence associée à la transition radiative. On obtient donc $h\nu = \frac{\gamma \hbar B_0}{2\pi}$. On a donc $2\pi\nu = \gamma B_0$, c'est-à-dire la même expression que la valeur de ω_0 obtenue dans la partie précédente. C'est une correspondance entre les approches classique et quantique.

15.a. On obtient le rapport des populations : $\frac{N^+}{N^-} = \frac{e^{-\frac{E^+}{k_B T}}}{e^{-\frac{E^-}{k_B T}}} = e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}} = e^{\frac{\gamma \hbar B_0}{k_B T}}$.

15.b. On connaît $N = N^+ + N^-$ et $\frac{N^+}{N^-}$ donc $\frac{N}{N^-} = \frac{N^+}{N^-} + 1 = e^{x'} + 1$ en notant $x' = \frac{\gamma \hbar B_0}{k_B T}$.

Ainsi : $N^- = \frac{N}{1+e^{x'}}$ et $N^+ = \frac{N e^{x'}}{1+e^{x'}}$.

15.c. Pour le cas limite $x' \rightarrow 0$, on trouve $N^+ = N^- = \frac{N}{2}$. L'agitation thermique l'emporte sur les effets du champ magnétique (ou le champ est nul), donc les deux orientations sont équiprobables. Dans le cas limite $x' \rightarrow \infty$, on trouve $N^+ \rightarrow N$ et $N^- \rightarrow 0$. Cela correspond à une très faible agitation thermique ; les spins tendent à être orientés majoritairement dans le sens du champ magnétique (état stable).

16. On peut considérer que statistiquement, les composantes de moments magnétiques normales à (Oz) se compensent pour un grand nombre de protons.

$$17. \text{ On a } \vec{\mathcal{M}}_0 = \left[\frac{\gamma\hbar}{2} N^+ - \frac{\gamma\hbar}{2} N^- \right] \vec{e}_z = \frac{\gamma\hbar}{2} \left[\frac{N e^{x'}}{1+e^{x'}} - \frac{N}{1+e^{x'}} \right] \vec{e}_z = \frac{N\gamma\hbar}{2} \frac{\left[\frac{e^{x'/2} - e^{-x'/2}}{e^{x'/2} + e^{-x'/2}} \right]}{\left[\frac{e^{x'/2} + e^{-x'/2}}{e^{x'/2} + e^{-x'/2}} \right]} \vec{e}_z$$

On a donc $\vec{\mathcal{M}}_0 = \frac{N\gamma\hbar}{2} \tanh\left(\frac{x'}{2}\right) \vec{e}_z$.

18. On fait l'application numérique : $x' = \frac{\gamma\hbar B_0}{k_B T} = \frac{26,8 \cdot 10^7 \times 1,055 \cdot 10^{-34} \times 3}{1,381 \cdot 10^{-23} \times 300} = 2 \cdot 10^{-5}$. On a donc $x' \ll 1$, donc on peut écrire que $\tanh\left(\frac{x'}{2}\right) \approx \frac{x'}{2}$, finalement, $\vec{\mathcal{M}}_0 \approx \frac{N(\gamma\hbar)^2 B_0}{4k_B T} \vec{e}_z$.

19.a. La somme des moments magnétiques au repos $\vec{\mathcal{M}}_0$ est proportionnelle au champ magnétique \vec{B}_0 : les spins tendent à s'aligner sur le champ magnétique d'autant plus que celui-ci est fort.

19.b. $\vec{\mathcal{M}}_0$ est inversement proportionnelle à T . L'agitation thermique tend à détruire l'alignement des spins.

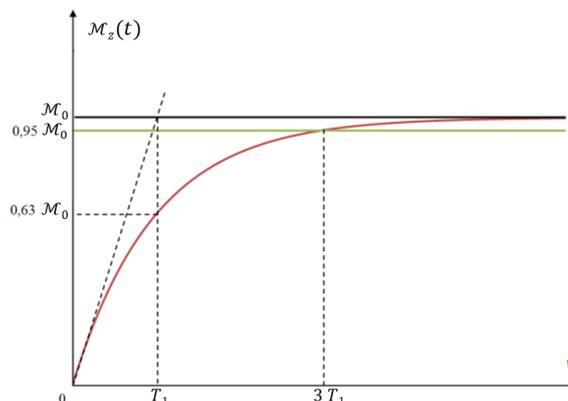
Étude de la relaxation

20. La projection de l'équation de BLOCH sur la direction (Oz) donne immédiatement :

$$\frac{d\mathcal{M}_z}{dt} = - \underbrace{(\omega_0 \vec{u}_z \wedge \vec{\mathcal{M}}) \cdot \vec{u}_z}_0 + \frac{\vec{\mathcal{M}}_0 - \mathcal{M}_z \vec{u}_z}{T_1} \cdot \vec{u}_z - \underbrace{\frac{\vec{\mathcal{M}}_{\perp} \cdot \vec{u}_z}{T_2}}_0$$

Il reste finalement $\frac{d\mathcal{M}_z}{dt} + \frac{\mathcal{M}_z}{T_1} = \frac{\mathcal{M}_0}{T_1}$.

Avec la condition initiale $\mathcal{M}_z(t=0) = 0$, on a directement : $\mathcal{M}_z(t) = \mathcal{M}_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$.



21. Les projections de l'équation de BLOCH selon \vec{u}_x et \vec{u}_y donnent :

$$\frac{dM_x}{dt} = \omega_0 M_y - \frac{M_x}{T_2} \text{ et } \frac{dM_y}{dt} = -\omega_0 M_x - \frac{M_y}{T_2}, \text{ ce qu'on peut récrire : } \boxed{\frac{d\vec{M}_\perp}{dt} = -\omega_0 \vec{u}_z \wedge \vec{M}_\perp - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2}}$$

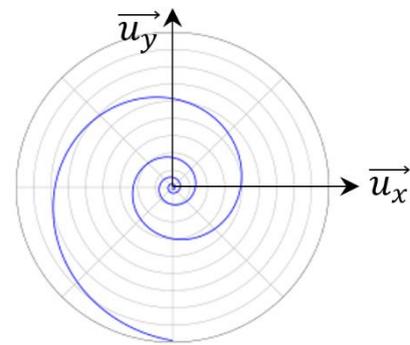
On teste la solution proposée de l'énoncé :

$$\frac{d\vec{M}_\perp}{dt} = \underbrace{-\mathcal{M}_0 e^{-\frac{t}{T_2}} (\omega_0 \cos(\omega_0 t) \vec{u}_x - \omega_0 \sin(\omega_0 t) \vec{u}_y)}_{-\omega_0 \vec{u}_z \wedge \vec{M}_\perp} + \underbrace{\frac{\mathcal{M}_0}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} (\sin(\omega_0 t) \vec{u}_x + \cos(\omega_0 t) \vec{u}_y)}_{-\frac{\vec{M}_\perp}{T_2}}$$

Quod erat demonstrandum.

On a donc bien : $\vec{M}_\perp = -\mathcal{M}_0 e^{-\frac{t}{T_2}} (\sin(\omega_0 t) \vec{u}_x + \cos(\omega_0 t) \vec{u}_y)$. S'il n'y avait pas le terme en exponentielle décroissante, l'extrémité de \vec{M}_\perp décrirait un cercle de rayon \mathcal{M}_0 .

L'extrémité de \vec{M}_\perp décrit donc une spirale logarithmique.



Étude de la tension électromotrice (ou « force électromotrice ») induite

22. On est dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) dès lors que l'on peut négliger les phénomènes de propagation dans le circuit étudié. Ceci est vrai dès que les temps de propagation des ondes électriques dans le circuit (à la vitesse $c = 2.10^8$ m.s⁻¹ dans le cuivre) sont très courts devant les temps caractéristiques de variation des signaux électriques. Autrement dit, on doit vérifier que $\frac{1}{f_0} \gg \frac{d}{c}$. En prenant $d \approx 10$ cm et $c = 2.10^8$ m.s⁻¹, on obtient $\frac{d}{c} \approx 0,5$ ns et $\frac{1}{f_0} \approx 20$ ns. On peut donc considérer que l'inégalité forte est convenablement vérifiée. On se place donc dans le cadre de l'ARQS.

23. L'induction électromagnétique se produit lorsque l'on observe le mouvement d'un circuit fermé dans un champ magnétique stationnaire (cas de Lorentz) ou lorsqu'on place un circuit fermé fixe dans un champ magnétique variable (cas de Neumann). Une tension électromotrice induite apparaît lorsque le flux du champ magnétique à travers le circuit varie. C'est Faraday qui a découvert ce phénomène, et la tension électromotrice induite dans le circuit s'écrit, en convention générateur et l'intensité étant orientée en conformité avec la normale au circuit, $e = -\frac{d\phi}{dt}$, où ϕ est le flux de \vec{B} à travers le circuit. Cette loi date de la première moitié du XIX^{ème} siècle.

24. On a $e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -k \frac{dM_x(t)}{dt} = -k \frac{d}{dt} \left[-\mathcal{M}_0 e^{-\frac{t}{T_2}} \sin(\omega_0 t) \right]$

Donc $e(t) = k\mathcal{M}_0 \left[\omega_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{T_2} \sin(\omega_0 t) \right] e^{-\frac{t}{T_2}}$.

25. a. On a $\omega_0 = 2\pi f_0 \approx 3.10^8 \text{ rad.s}^{-1}$ alors que $\frac{1}{T_2} \approx 1 \text{ s}^{-1}$ (T_2 est de l'ordre de la seconde). On peut donc négliger le second terme de la somme devant le premier, il reste : $e(t) = k\mathcal{M}_0\omega_0 \cos(\omega_0 t) e^{-\frac{t}{T_2}}$.

b. ω_0 est proportionnelle à γ et B_0 . k ne dépend ni de γ ni de B_0 . D'après la partie précédente, \mathcal{M}_0 est proportionnel à γ^2 et à B_0 . Donc l'amplitude de $e(t)$ est proportionnelle à γ^3 et B_0^2 .

c. On ne peut pas changer la valeur de γ pour un atome donné. Si l'on souhaite une meilleure résolution donc travailler avec un nombre d'atomes plus faible, il faut augmenter la valeur du champ magnétique.

Troisième partie : Étude du circuit de détection

26. En basses fréquences, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. En hautes fréquences, le condensateur se comporte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert. On a donc en hautes et basses fréquences $i(t) = 0$ et par suite $u_s(t) = Ri(t) = 0$. Il s'agit donc probablement d'un filtre passe-bande.

27. Tous les composants sont linéaires, et le régime est sinusoïdal forcé. L'utilisation de la notation complexe conduit naturellement, avec un pont diviseur de tension, à l'expression de la transmittance :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R_{tot}}$$

28.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{R}{R_{tot}}}{\frac{jL}{R_{tot}}\omega + \frac{1}{jR_{tot}C\omega} + 1}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{R}{R_{tot}}}{1 + j \times \frac{1}{R_{tot}} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(s - \frac{1}{s} \right)}$$

On identifie donc $a = \frac{R}{R_{tot}}$ et $b = \frac{1}{R_{tot}} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

29. a. H est le gain de la fonction de transfert. Il s'agit du rapport des amplitudes des signaux de sortie et d'entrée. Si $|H| > 1$ il y a amplification, si $|H| < 1$, il y a atténuation. La valeur maximal $H_{max} = \frac{R}{R_{tot}}$ est atteinte lorsque le dénominateur de la fonction de transfert est réel, c'est-à-dire pour $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

b. Les pulsations de coupure correspondent donc à $\sqrt{1 + b^2 \left(s - \frac{1}{s} \right)^2} = \sqrt{2}$ c'est-à-dire :

$$b^2 \left(s - \frac{1}{s} \right)^2 = 1, \text{ soit encore } b \left(s - \frac{1}{s} \right) = \pm 1.$$

On résout $bs^2 \mp s - b = 0$ (quatre racines) et on ne conserve que les deux racines positives puisqu'on ne travaille que sur des pulsations positives : $s_1 = \frac{-1+\sqrt{\Delta}}{2b}$ et $s_2 = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2b}$.

On a immédiatement : $\Delta\omega = \frac{s_2 - s_1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{b\sqrt{LC}}$.

c. Le facteur de qualité est $Q = \frac{1}{\sqrt{LC}\Delta\omega} = b = \frac{1}{R_{tot}}\sqrt{\frac{L}{C}}$ il s'agit d'une grandeur sans dimension.

30. A la pulsation propre du filtre, égale à 50 MHz, la lecture graphique donne $G_{dB} = -7 \text{ dB} \pm 1 \text{ dB}$.

Aux pulsations de coupure, le gain est donc inférieur de 3 dB, soit environ $-10 \text{ dB} \pm 1 \text{ dB}$.

On mesure graphiquement les pulsations correspondant à un gain de -47 dB , correspondant à une atténuation d'un facteur 100 par rapport à la pulsation propre. On trouve $2,8 \cdot 10^7 \text{ Hz}$ et $9 \cdot 10^7 \text{ Hz}$.

31. On peut considérer qu'une incertitude sur des composants correspond à une distribution gaussienne des erreurs puisqu'il s'agit d'une production en série.

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2$$

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{25}}{100} = 3\%$$

Avec une incertitude de 4% sur la pulsation propre d'un filtre aussi sélectif, on risque de se retrouver dans une situation où le signal que l'on souhaite récupérer ne se trouve pas dans la bande passante du filtre.

32. La capacité du condensateur dépend de la surface des armatures, de l'épaisseur du matériau isolant qui les sépare et des caractéristiques physiques de ce dernier. On peut réaliser une capacité variable en modifiant l'épaisseur entre les armatures (principe d'une diode varicap, par exemple).

A cause de la dérive des autres composants (en fonction de la température, de leur vieillissement, etc.), il est nécessaire de procéder à l'opération d'accord à chaque utilisation pour pouvoir fixer exactement la pulsation propre du filtre à la pulsation de résonance des noyaux étudiés.

33. On a $Q = 100$. Donc $\sqrt{\frac{L}{C}} = 100 \Omega$. Et de plus $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 5 \cdot 10^7 \text{ Hz}$. Donc $\frac{1}{\sqrt{LC}} = 314 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$.

Il en résulte immédiatement : $\frac{1}{C} = 3,14 \cdot 10^{10} \text{ F}^{-1}$, donc $C = 30 \text{ pF}$ et $L = \frac{100}{314} \cdot 10^{-6} = 0,3 \mu\text{H}$. Ces valeurs sont assez faibles, mais disponibles au laboratoire et tout à fait cohérentes pour une réalisation sur circuit imprimé par exemple.

34. On considère des pulsations dans l'intervalle $\left[\omega_0 - \frac{3}{T_2}; \omega_0 + \frac{3}{T_2}\right]$, soit $s = \frac{\omega}{\omega_0} \in \left[1 - \frac{3}{T_2\omega_0}; 1 + \frac{3}{T_2\omega_0}\right]$. s est dans l'intervalle $[1 - 10^{-8}; 1 + 10^{-8}]$ donc $s - \frac{1}{s}$ est dans l'intervalle $[-2 \cdot 10^{-8}; 2 \cdot 10^{-8}]$.

35. a. D'après la réponse à la question qui précède, on peut écrire $\underline{H}(j\omega) = a$ dans la gamme de pulsations correspondant au spectre de e .

b. Pour toutes les valeurs de pulsations comprises dans le spectre de e , la valeur de la fonction de transfert est identique. Ainsi : $\underline{u}_s(t) = a \times e(t)$.

36. a. La condition recherchée s'écrit $e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q} + \frac{t}{T_2}} < 10^{-2}$, soit $\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{1}{T_2}\right)t < -2 \ln(10)$, c'est-à-dire $t > \frac{2 \ln(10)}{\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{1}{T_2}} \approx \frac{2 \ln(10)}{\frac{\omega_0}{2Q}}$. Numériquement, on a donc $t > 3.10^{-7} \text{ s} \ll T_2$.

b. À l'échelle de temps de la durée d'enregistrement, la condition précédente est bien vérifiée. Donc on obtient une sortie directement proportionnelle au signal d'entrée que l'on cherche à sélectionner et amplifier.

Quatrième partie : Détermination de constantes physico-chimiques *in vivo* par transfert d'aimantation RMN

37. Avec les conditions [I] ou [II], on obtient comme équation différentielle :

$$\frac{d\mathcal{M}_z^A}{dt} = -\frac{\mathcal{M}_z^A - \mathcal{M}_0^A}{T_{1A}} - k_f \mathcal{M}_z^A$$

On obtient donc une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants qui s'écrit :

$$\frac{d\mathcal{M}_z^A}{dt} + \mathcal{M}_z^A \left(\frac{1}{T_{1A}} + k_f \right) = \frac{\mathcal{M}_0^A}{T_{1A}}$$

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$\mathcal{M}_z^A(t) = \frac{\mathcal{M}_0^A \times T_{1A}^*}{T_{1A}} + K e^{-\frac{t}{T_{1A}^*}} \quad K \in \mathbb{R}$$

Les conditions initiales donnent accès à la valeur de K , et on a avec $T_{1A}^* = \frac{T_{1A}}{1+k_f T_{1A}}$:

$$\text{Conditions [1]} : \mathcal{M}_z^A(t) = \mathcal{M}_0^A \left(k_f T_{1A}^* e^{-\frac{t}{T_{1A}^*}} + \frac{T_{1A}^*}{T_{1A}} \right)$$

$$\text{Conditions [2]} : \mathcal{M}_z^A(t) = \frac{\mathcal{M}_0^A \times T_{1A}^*}{T_{1A}} \left(1 - e^{-\frac{t}{T_{1A}^*}} \right)$$

38. On doit obtenir les valeurs numériques de deux paramètres, il faut donc procéder au moins à deux mesures.

La valeur asymptotique des deux fonctions doit être la même puisque les fonctions sont solution d'une même équation différentielle (seule la condition initiale change). La constante de temps est également la même.

On mesure la valeur asymptotique et on obtient $\frac{\mathcal{M}_z^A(\infty)}{\mathcal{M}_0^A} = 0,70 \pm 0,05$ (il ne faut pas prendre comme incertitude la barre d'erreur du dernier point, puisque l'asymptote est obtenue sur une régression prenant en compte tous les points de l'expérience... qui sont certes peu précis individuellement, mais bien alignés sur le modèle).

On mesure $T_{1A}^* \approx 2,2 \pm 0,2 \text{ s}$ (avec la méthode à 63% de la valeur finale complétée d'un tracé de la tangente pour valider la mesure).

Ainsi : $T_{1A}^* = 2,2$ s et $\frac{T_{1A}^*}{T_{1A}} = 0,7$ (valeur finale). On en déduit $T_{1A} = 3,1$ s (cohérent avec les ordres de grandeur donnés au long de l'énoncé). Pour l'incertitude, les valeurs mesurées T_{1A}^* et $\frac{T_{1A}^*}{T_{1A}}$ étant mesurées à environ 10% près, on peut considérer une incertitude égale à $\sqrt{2} \times 10\% \approx 14\%$ et on donne finalement $T_{1A} = (3,1 \pm 0,5)$ s.

Pour k_f il faut inverser l'équation $T_{1A}^* = \frac{T_{1A}}{1+k_f T_{1A}}$. On a donc $1 + k_f T_{1A} = \frac{1}{0,7} = 1,4$. Ainsi $k_f T_{1A} = 0,4$ et finalement $k_f = 0,13$ s⁻¹. En conservant le même ordre de grandeur d'incertitude relative, on a $k_f = 0,13 \pm 0,02$ s⁻¹.