

Epreuve de fin d'année 2019

Deuxième composition de physique Mardi 18 juin 2019 – 4h Classes de PCSI

**L'utilisation de la calculatrice est interdite.
Aucun document n'est autorisé.**

- *Cette composition est constituée de deux problèmes **indépendants** d'égale importance.*
- *Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction dans la notation.
En particulier, on prendra soin de bien donner des résultats littéraux exprimés en fonction des données du problème avant toute application numérique.*
- *Toutes les applications numériques seront données avec **un** seul chiffre significatif.*
- *Dans les deux problèmes, une partie des données numériques nécessaires aux applications numériques sont rassemblées dans un tableau à la fin du problème considéré.*

Premier problème : impact d'un bolide avec la Terre

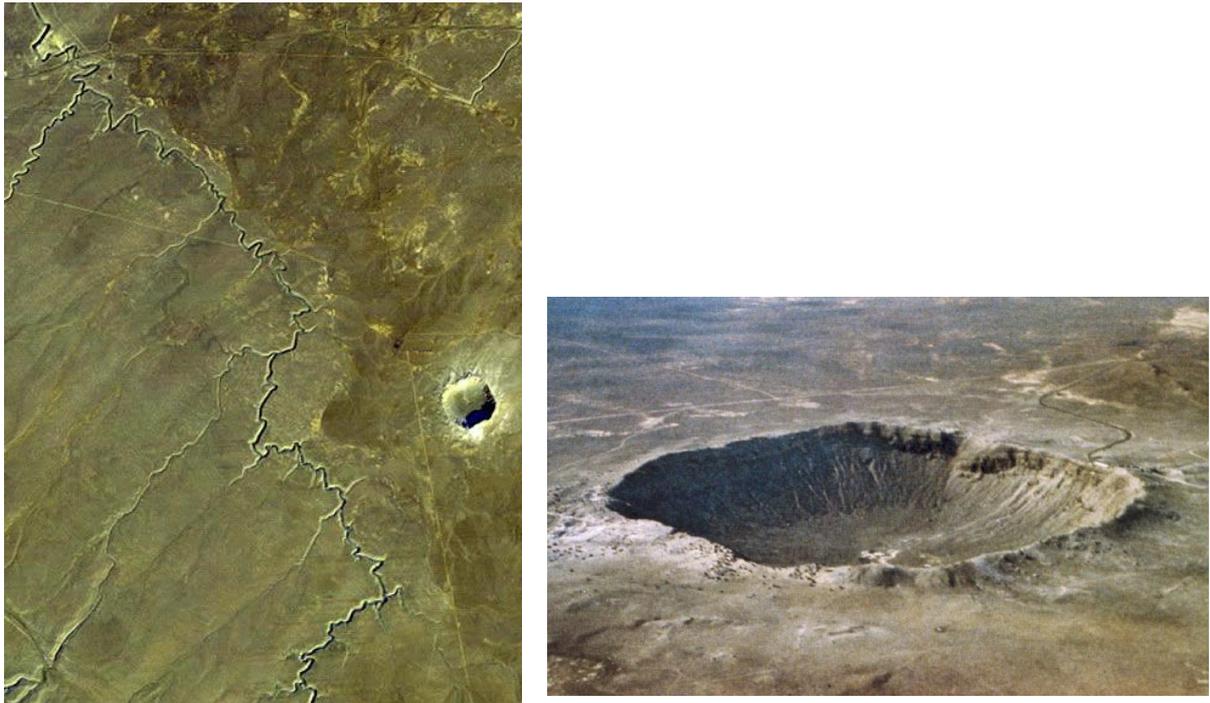


Figure 1 : Vue Météor Crater (Arizona – Etats -Unis) : à gauche vue satellite, à droite vue aérienne.

L'objet de ce problème est d'étudier l'impact d'un bolide (astéroïde ou comète) avec la Terre. Dans tout l'énoncé, on supposera que le bolide ne possède aucun mouvement de rotation propre.

I. Collision entre un bolide et la Terre

On se place dans le référentiel de Kepler supposé galiléen, dont l'origine est confondue avec le centre du Soleil et dont les axes sont dirigés vers trois étoiles fixes très éloignées. La Terre et le soleil présentent des symétries sphériques. La masse de la Terre est négligeable devant celle du Soleil. La Terre décrit approximativement une orbite circulaire de rayon R_0 autour du Soleil et on exclut toute influence des autres planètes ou objets célestes. On note M_T la masse de la Terre et R_T son rayon.

1) Montrer que le mouvement circulaire de la Terre est uniforme. Exprimer la vitesse orbitale de la Terre, notée v_T , en fonction de la constante gravitationnelle G , de la masse du soleil M_S et de R_0 . Faire l'application numérique.

Dans la suite du sujet, on se place dans le référentiel géocentrique. Ce référentiel a pour origine le centre O de la Terre et a des axes parallèles à ceux du référentiel de Kepler.

2) Ce référentiel est-il galiléen ? On justifiera sa réponse.

On suppose dans la suite du problème que ce référentiel est galiléen.

On considère un astéroïde approchant de la Terre ayant une vitesse v_r dans le référentiel géocentrique. Usuellement, la vitesse v_r est située entre 0 et 60 km/s. Le bolide assimilé, pour le moment, à un point matériel possède une masse m_b très négligeable devant celle de la Terre. Le bolide, depuis une région très éloignée de la Terre, arrive avec une vitesse $\vec{v}_r = v_r \vec{e}_x$ et sa trajectoire est portée par une droite située à une distance b du centre de la Terre (figure 2). Le système {Terre-bolide} est considéré comme isolé.

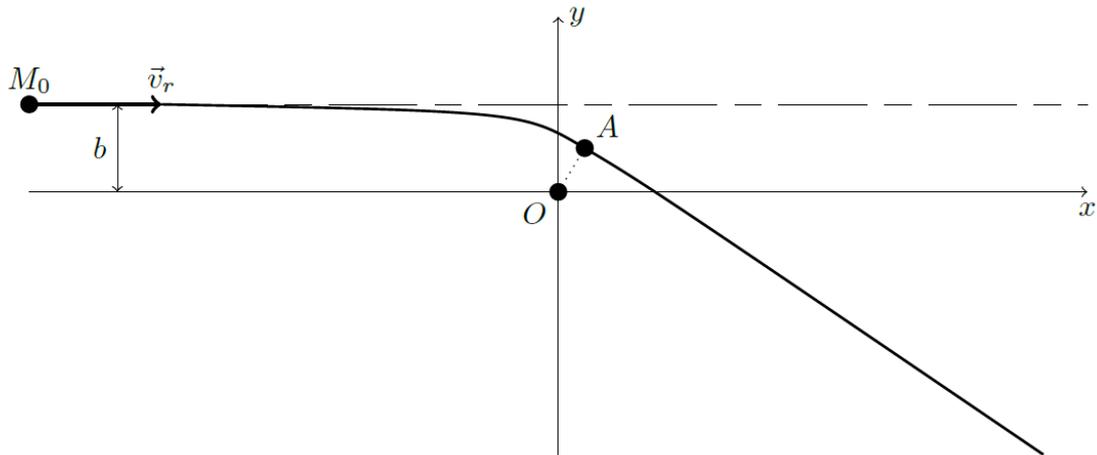


Figure 2 : Trajectoire du bolide dans le référentiel géocentrique

3) Rappeler l'expression de l'énergie mécanique E_m du bolide en un point quelconque de sa trajectoire en fonction de sa vitesse v , de sa distance r au centre de la Terre, de sa masse m_b , de la masse M_T de la Terre et de la constante gravitationnelle G .

4) Montrer que le moment cinétique du bolide en O est conservé au cours de son mouvement. Définir une énergie potentielle effective. Déterminer la nature de la trajectoire du bolide.

On note A le point de la trajectoire le plus proche de la Terre. $d_{min}=OA$ représente donc la distance minimale entre le centre de la Terre et le bolide.

5) Montrer-qu'au point A, la vitesse du bolide, notée \vec{v}_A est perpendiculaire au vecteur \vec{OA} . Déterminer une relation simple entre v_r , d_{min} , b et $v_A = \|\vec{v}_A\|$.

6) Déterminer l'expression de d_{min} , en fonction de G , M_T , v_r et b .

7) Pour que le bolide entre en collision avec la Terre, montrer que le paramètre d'impact b doit être inférieur à une valeur maximale notée b_{max} que l'on exprimera en fonction de R_T , G , M_T et v_r .

8) En cas de collision, montrer que l'expression de la vitesse au moment de l'impact, notée v_i , peut se mettre sous la forme : $v_i = \sqrt{v_r^2 + v_l^2}$ où l'on exprimera v_l en fonction de R_T , G et M_T . Calculer la valeur numérique de la vitesse v_l et préciser sa signification physique.

9) Quel est l'intervalle numérique des valeurs possibles de la vitesse d'impact v_i d'un astéroïde avec la Terre ?

Le bolide est maintenant modélisé par une sphère pleine de rayon $r_b=80$ m et de masse volumique $\rho_b=2,5.10^3$ kg.m⁻³ (matériau rocheux).

10) Calculer l'énergie cinétique du bolide pour une vitesse d'impact $v_i=20$ km.s⁻¹.

Une tonne d'explosifs de TNT (trinitrotoluène) libère une énergie de $4,18 \cdot 10^9$ J. Par ailleurs, une kilotonne de TNT représente 10^3 tonnes de TNT et une mégatonne 10^6 tonnes de TNT. Exprimer l'énergie cinétique précédente du bolide en termes d'équivalent TNT. Comparer cette énergie à la bombe atomique d'Hiroshima (6 août 1945) qui a produit une énergie équivalente à l'explosion de 15 kilotonnes de TNT. Cette comparaison avec une bombe atomique a bien un sens car le bolide libère son énergie cinétique au moment de l'impact, sous la forme d'une explosion.

II. Traversée de l'atmosphère par le bolide

Dans cette partie, on s'intéresse à la traversée de l'atmosphère terrestre par le bolide précédent (sphère pleine de rayon r_b et de masse volumique ρ_b).

La courbure locale de la Terre est négligée et on confond sa surface, dans la région de l'impact, avec son plan tangent. On utilise une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et un point de l'espace est repéré par ses coordonnées (x, y, z) . On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Le champ de pesanteur, dirigé suivant la verticale descendante est supposé uniforme : $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ avec $g=9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

L'atmosphère terrestre est supposée être à l'équilibre isotherme de température uniforme T_0 . L'air est assimilé à un mélange de gaz parfait de masse molaire M_{air} , $\rho(z)$ et $P(z)$ représentent respectivement la masse volumique et la pression de l'air à l'altitude z . Ces grandeurs sont notées ρ_0 et P_0 au niveau du sol ($z=0$).

11) Montrer que la masse volumique $\rho(z)$ vérifie la loi : $\rho(z) = \rho_0 \exp(-\frac{z}{H_a})$, où l'on exprimera la hauteur caractéristique H_a en fonction de M_{air} , T_0 , R la constante des gaz parfaits et g .
Application numérique. Calculer H_a et ρ_0 . On prendra $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et $T_0 = 290 \text{ K}$.

Le bolide entre dans l'atmosphère avec une vitesse $v_i = 20 \text{ km.s}^{-1}$.

Durant la traversée de l'atmosphère, il est soumis à son poids et à la force de trainée de norme :

$$F_t = \frac{1}{2} C \rho(z) \pi r_b^2 v^2,$$

anticolinéaire à la vitesse du bolide et où $C=2$ est le coefficient de trainée, $\rho(z)$ la masse volumique de l'air et v la vitesse instantanée du bolide. On suppose que le bolide conserve sa masse au cours de la chute.

12) Montrer qu'en terme d'ordre de grandeur, le poids du bolide est négligeable devant la force de trainée « proche » de la surface terrestre.

13) Expliquer alors pourquoi il est possible de modéliser la trajectoire du bolide dans l'atmosphère par une droite inclinée d'un angle θ par rapport à la verticale \vec{e}_z . On choisit les axes du repère de telle manière que la trajectoire se situe dans le plan $y=0$ (voir figure 3).

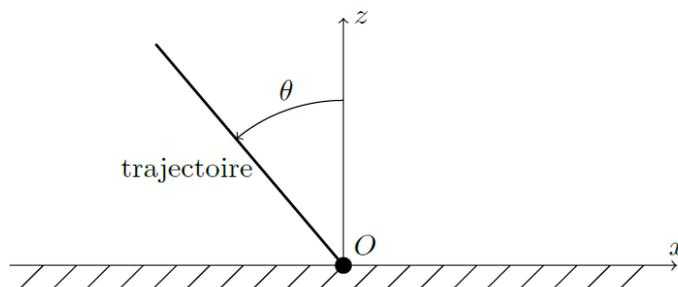


Figure 3 : Trajectoire du bolide dans l'atmosphère terrestre

14) Exprimer l'accélération du bolide $a = \frac{dv}{dt}$ en fonction de C , r_b , ρ_b , $\rho(z)$ et $v(t)$.

Exprimer la grandeur $\frac{dv}{dz}$ en fonction de l'accélération du bolide $a = \frac{dv}{dt}$ et de la composante verticale de la vitesse du bolide $v_z = \frac{dz}{dt}$.

En remarquant que $v_z = -v \cos\theta$, exprimer $\frac{dv}{dz}$ en fonction de C , r_b , ρ_b , $\rho(z)$, v et θ .

En utilisant la condition $\lim_{z \rightarrow \infty} v(z) = v_i$ (vitesse d'entrée dans l'atmosphère), déterminer la loi de la vitesse du bolide en fonction de l'altitude z : $v = f(z)$.

Le freinage par l'atmosphère est-il plus efficace pour les petites ou les grosses météorites ?

15) Calculer numériquement la variation relative de la vitesse du bolide entre son entrée dans l'atmosphère et son arrivée à la surface de la Terre.

On prendra par exemple $\theta=45^\circ$ et on pourra utiliser le développement limité de la fonction exponentielle autour de zéro en justifiant son utilisation. Conclure.

16) Calculer numériquement la variation relative de l'énergie cinétique du bolide entre son entrée dans l'atmosphère et son arrivée à la surface de la Terre. Conclure.

III. Cratère d'impact provisoire

Dans cette partie, on néglige le freinage du bolide dans l'atmosphère terrestre. Ce dernier arrive donc sur Terre avec la vitesse v_i .

Entre le moment où le bolide touche le sol et celui où il est stoppé, il ne s'écoule que quelques fractions de secondes pendant lesquelles son énergie cinétique est convertie en énergie interne. Cette énergie vaporise le bolide et des matériaux de la croûte terrestre, amenant l'ensemble à une température de l'ordre de 10.10^4 K sous une pression de plusieurs mégabars. Cette pression est très supérieure à ce que peuvent supporter les matériaux de la croûte terrestre. Puisque rien ne peut contenir la vapeur produite, il se produit une énorme explosion. Cette explosion provoque une intense onde de choc qui se propage à partir de la zone d'impact en pulvérisant les strates rocheuses et en éjectant les matériaux en partie sous la forme d'un magma ultra-chaud. L'intensité de l'onde de choc s'atténuant au cours de sa propagation, elle finit par se transformer en une « simple onde sismique ». La phase d'excavation s'achève par la formation d'un cratère transitoire qui évolue par la suite vers le cratère définitif. L'objectif de cette partie est d'estimer le diamètre D du cratère provisoire modélisé par un hémisphère (demi-sphère de la figure 4). Pour cela, on considère que l'énergie cinétique du bolide sert, en première approximation, à fracturer les matériaux et à les éjecter en dehors du cratère.

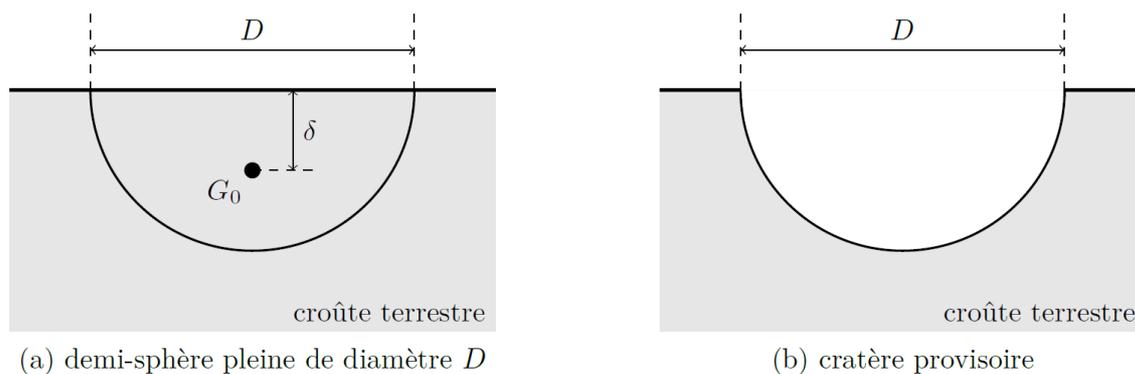


Figure 4 : Formation d'un cratère provisoire

17) Calculer numériquement l'énergie cinétique massique du bolide. La comparer avec l'enthalpie massique de vaporisation des matériaux rocheux $h_v=8$ MJ.kg⁻¹.

L'énergie servant à fracturer les matériaux de la croûte, notée E_{coh} (énergie de cohésion) peut être estimée en multipliant le volume de la demi-sphère pleine de diamètre D de la figure 4(a) par une grandeur Y caractéristique de la résistance des matériaux constitutifs.

Le barycentre G_0 de la demi-sphère pleine se trouve à la profondeur $\delta = \frac{3D}{16}$ (voir figure 4(a)). On estime que l'énergie E_g nécessaire pour éjecter les matériaux est égale au travail du poids pour amener ce barycentre au niveau du sol.

18) Quelle est l'unité de Y ? Exprimer E_{coh} .

Exprimer E_g en fonction de la masse volumique de la croûte terrestre ρ_C du diamètre D et du champ de pesanteur g .

19) Etablir l'équation permettant de relier le rayon du bolide r_b au diamètre du cratère D .

20) Déterminer l'ordre de grandeur de la taille de la météorite à l'origine du cratère *Météor Crater* (figure 1). On pourra utiliser des informations issues de l'extrait de Wikipédia (figure 5).

21) Dans la littérature scientifique de vulgarisation, on lit souvent : « Le diamètre du cratère est souvent 20 fois le diamètre de la météorite ». Pouvez-vous confirmer cette affirmation ?

Meteor Crater est un [cratère d'impact](#) situé environ 60 km à l'est de [Flagstaff](#), en [Arizona](#) (ouest des [États-Unis](#)). Il est aussi appelé **cratère Barringer**, en souvenir de l'ingénieur des mines [Daniel Moreau Barringer](#) qui acheta le site en [1903](#). Il avait antérieurement été nommé **cratère Canyon Diablo**, nom qui est resté celui de [la météorite](#) à l'origine du cratère. Le cratère, en forme de bol, mesure entre 1 200 et 1 400 mètres de [diamètre](#), et sa profondeur est de 190 mètres¹....Le cratère s'est formé il y a environ 50 000 ans, au [Pléistocène](#), alors que le climat du [plateau du Colorado](#) était plus frais et plus humide qu'aujourd'hui. À cette époque, la région était recouverte par une végétation de [savane](#) ouverte et peuplée de [mamouths](#) laineux, de [paresseux terrestres](#) géants et de [camélidés](#). En revanche, les êtres humains ne peuplaient probablement pas encore la région...

À l'origine, les modélisations donnaient une vitesse de 20 km/s³ mais les études les plus récentes^{4,5} avancent une vitesse plus faible, de 12,8 km/s. On estime que la météorite a perdu la moitié de sa masse initiale, qui était de l'ordre de 300 000 tonnes, au cours de sa traversée de l'atmosphère terrestre. Une partie de la roche constituant la météorite s'est en effet vaporisée au cours de cette traversée. La météorite est entrée en collision avec le sol suivant un angle de 80 [degrés](#).

La collision a dégagé une énergie considérable équivalente à 2,5 mégatonnes de [TNT](#)^{6,7} ou encore à celle d'une [explosion thermonucléaire](#) environ 150 fois plus puissante que celle de la [bombe d'Hiroshima](#). L'explosion éjecta du sol 175 millions de tonnes de roche.

Des blocs de roche [calcaire](#) pesant plus de trente tonnes ont été projetés au-delà du cratère ; des débris rocheux formés au moment de l'impact ont été retrouvés sur une étendue de 260 km².

La chaleur et le souffle engendrés par la collision ont probablement détruit instantanément toute forme de vie dans un rayon de quatre kilomètres. Dans un rayon de dix kilomètres, la chaleur dégagée par la boule de feu a provoqué de sévères brûlures sur tous les organismes vivants. Dans un rayon de quatorze à vingt-deux kilomètres, une onde de choc se déplaçant à la vitesse de 2 000 km/h a tout balayé sur son passage.

Cependant l'impact ne projeta pas une quantité de poussière suffisante dans l'atmosphère pour pouvoir modifier notablement le climat de la Terre. La zone de la collision fut entièrement recolonisée par la faune et la flore en l'espace d'un siècle.

Figure 5 : Extrait de l'article de Wikipédia sur Météor Crater

Données numériques :

Orbite terrestre	$R_0=1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Masse de la Terre	$M_T=6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Masse du soleil	$M_S=2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Rayon de la Terre	$R_T=6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$
Constante gravitationnelle	$G=6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$
Constante des gaz parfaits	$R=8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
Masse molaire moyenne de l'air	$M_{\text{air}}=29 \text{ g.mol}^{-1}$
Donnée croûte terrestre	$Y=3,0 \cdot 10^7 \text{ SI}$
Masse volumique croûte terrestre	$\rho_c=2,7 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
Masse volumique météorite rocheuse	$\rho_b=2,5 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

Deuxième problème : la physique du skeleton

Le skeleton est un sport d'hiver qui se pratique dans un couloir de glace en pente : le coureur s'allonge sur une planche qui glisse sur la glace en prenant appui sur ses patins.

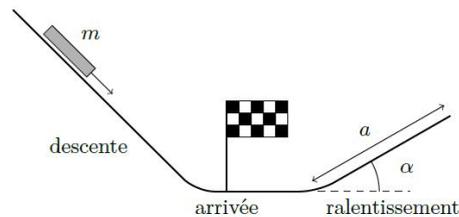


Figure 1 : Photo du skeleton, schéma du dispositif de freinage avec plan incliné

I. Freinage avec plan incliné

L'ensemble coureur + skeleton est assimilé à un solide de masse m pouvant glisser sans frottements. Il franchit la ligne d'arrivée avec une vitesse v_0 et se ralentit simplement en montant une pente faisant un angle α avec l'horizontale.

1) Déterminer la longueur a de la piste nécessaire au ralentissement. On justifiera soigneusement la démarche présentée.

On considérera une pente de 5% pour l'application numérique.

II. Freinage à l'aide d'un champ magnétique

L'infrastructure ne se prêtant pas à la réalisation d'une piste inclinée de décélération, on envisage un autre type de freinage. C'est ce freinage et ses conséquences que l'on va étudier dans la suite du problème.

On fixe sous la planche un cadre métallique rectangulaire de côtés l et L , constitué d'un conducteur cylindrique de section s et de masse volumique μ . La piste de décélération est horizontale et on considère le référentiel lié au sol galiléen. On considère un repère $(Oxyz)$ lié au sol : l'origine O est prise au point d'arrivée, l'axe (Ox) le long de la piste de décélération (qui correspond donc à $x > 0$) et l'axe (Oy) est l'axe vertical ascendant. Un dispositif adéquat crée un champ magnétique stationnaire $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$ et uniforme sur toute ou partie de la longueur de piste de décélération (et sur toute la largeur de la piste).

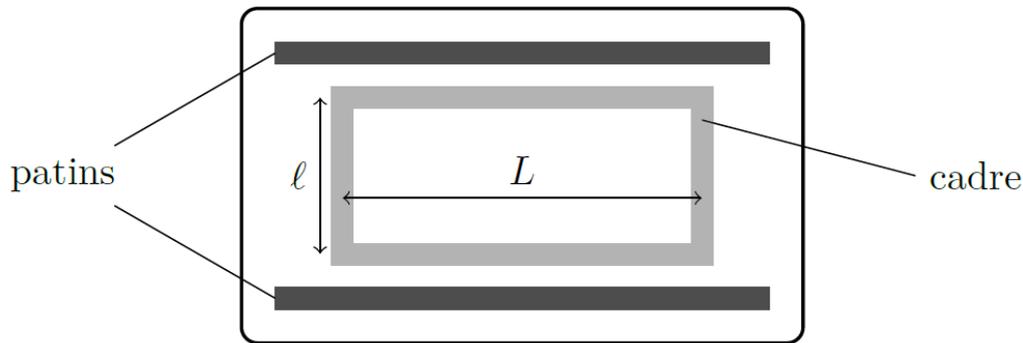


Figure 2 : Cadre métallique placé sous la planche

Le champ magnétique est étendu à toute la zone $x > 0$.

La position du cadre est repérée par l'abscisse x de son extrémité avant et on suppose $x=0$ à $t=0$. On note R la résistance électrique du cadre conducteur.

2) Etablir les équations différentielles à laquelle obéit la vitesse $v=dx/dt$. On distinguera deux phases dans le mouvement et on détaillera bien son raisonnement à l'aide de dessins.

Déterminer un temps caractéristique τ d'évolution de la vitesse et l'exprimer en fonction de B_0 , m , l et R puis faire l'application numérique.

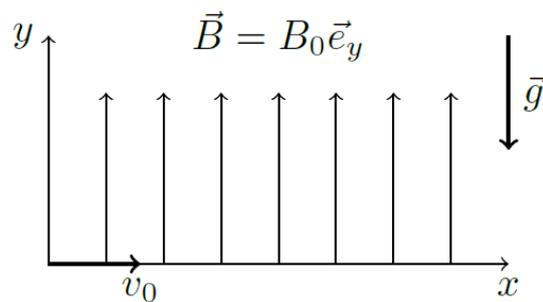


Figure 3 : Description du champ magnétique à l'origine du freinage

3) Déterminer les expressions de la vitesse $v(t)$ et la position $x(t)$ du cadre pendant la phase de décélération.

En déduire une relation entre $x(t)$ et $v(t)$ pendant cette même phase.

4) Déterminer la vitesse finale v_f du cadre à la fin de la phase de décélération.

Faire l'application numérique et commenter.

A quelle(s) condition(s) le skeleton pourrait-il être freiné quasi-complètement avec une telle méthode ? Discuter la faisabilité de ces conditions.

On suppose à présent que le champ magnétique (stationnaire et uniforme) n'est non nul que dans la zone comprise entre $x=0$ et $x=d$.

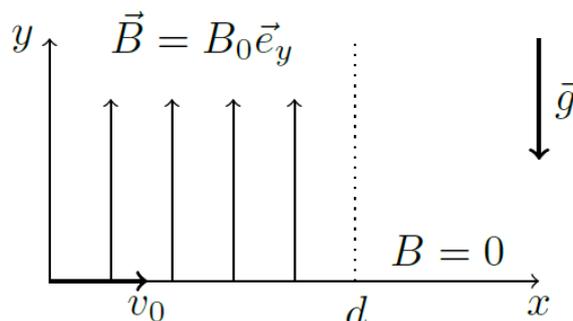


Figure 4 : Description de la zone où règne le champ magnétique

5) Si $L > d$, montrer qualitativement qu'il existe deux phases de freinage séparées par une phase où la vitesse reste constante et déterminer la vitesse v_f' à l'issue de l'ensemble du processus de freinage.

6) Même question si $L \leq d$ en notant v_f'' la vitesse à l'issue de l'ensemble du processus de freinage.

7) Quelle valeur doit-on donner à d pour optimiser le freinage ? On prendra cette valeur dans la suite.

On place N zones de freinage de longueur d identiques à la précédente séparées les unes des autres d'une distance D .

8) Quelle doit être la distance D pour optimiser le freinage ?

9) Quelle valeur donner à N pour stopper le skeleton ? Application numérique.
En déduire la distance d'arrêt et comparer sa valeur numérique à la valeur de la question 1).

10) Déterminer la durée de la première phase de freinage (la distance parcourue par le cadre pendant cette phase est de $2L$) en fonction de τ , v_0 et L . Déterminer la durée totale du freinage après traversée des N zones en fonction τ , v_0 , L et N . Conclure.

III. Etude de l'échauffement et du refroidissement du cadre

On désire étudier l'échauffement du cadre conducteur lors du freinage. On note m' la masse du cadre et c sa capacité thermique massique.

On suppose que la température du cadre est uniforme, ne dépendant que du temps éventuellement.

Dans un premier temps, on néglige également les transferts thermiques de la part du cadre vers l'extérieur.

11) Comment cette dernière hypothèse peut-elle être justifiée ?
Quelle est l'origine d'une élévation de la température dans le cadre ?

12) En appliquant un premier principe à un système bien choisi, déterminer la variation de température du cadre lors du freinage électromagnétique. On considérera pour simplifier que la vitesse est nulle à l'issue de la phase de freinage électromagnétique et on fera l'application numérique.

Après arrêt du skeleton le cadre se refroidit en échangeant de la chaleur avec le milieu extérieur. Au cours de cette phase de refroidissement, la température T_C du cadre est supposée uniforme mais dépendant du temps. $T_C(t)$ passe ainsi de T_1 à T_0 , T_0 étant la température de l'air, supposée uniforme et constante. Les transferts thermiques entre le cadre et l'air ont lieu selon un mode dit conducto-convectif : il y a discontinuité de température entre le cadre et l'air et la température T_C est différente de T_0 . La puissance thermique transférée à l'air par unité de surface latérale du cylindre est $P_{th} = h(T_C - T_0)$ où h est le coefficient conducto-convectif supposé positif et constant.

13) Déterminer l'équation différentielle satisfaite par la température $T_C(t)$ puis la résoudre.
Donner le temps caractéristique du refroidissement τ' en fonction des paramètres déjà introduits.
Application numérique.

Données numériques :

Masse m	100 kg
Vitesse d'arrivée v_0	30 m.s^{-1}
Accélération de pesanteur g	10 m.s^{-2}
Côté du cadre l	30 cm
Côté du cadre L	50 cm
Champ magnétique B_0	$1,0 \text{ T}$
Résistance R	$1,0 \cdot 10^{-2} \Omega$
Masse volumique du cadre μ	$8,9 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
Capacité thermique du cadre c	$390 \text{ J.K}^{-1}\text{kg}^{-1}$
Section du cadre s	$1,0 \text{ cm}^2$
Coefficient conducto-convectif h	$10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$

On rappelle la définition d'une pente de $n\%$:

La pente topographique est la tangente de l'inclinaison entre deux points d'un terrain, donc de son angle vis-à-vis de l'horizontale. C'est donc le rapport entre la différence d'altitudes entre les deux points et la distance horizontale, cartographique, entre ces deux points.

FIN DE L'ÉPREUVE