

Khas PCSI - Physique 1

Stabilités et instabilités en physique

Durée de l'épreuve : 4h

Tous documents interdits - Calculatrice interdite

Le problème comporte 4 parties indépendantes entre elles.

Formulaire

On donne les valeurs numériques suivantes :

$$19^2 = 361$$

$$6/7 \approx 0,86$$

$$\cos(13^\circ) \approx 0,97$$

$$\ln(1,43) \approx 0,35$$

$$\cos(82^\circ) \approx 0,14$$

$$\ln(30) \approx (3,4)$$

1 Oscillateur harmonique

On considère un pendule élastique constitué d'un point matériel M de masse m astreint à se déplacer sur un axe horizontal Ox . L'axe Ox est fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen. L'origine des abscisses O constitue une extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité est fixée au point M . Initialement le point M est lâché sans vitesse initiale depuis un point d'abscisse $x_0 > \ell_0$. On considère que le mouvement de M sur l'axe Ox s'effectue sans aucun frottements.

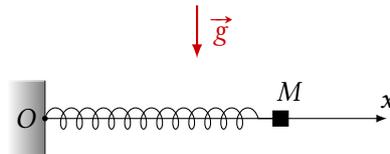


FIG. 1 : Oscillateur élastique horizontal

1. Établir le bilan des forces sur le point matériel M .
2. Montrer que l'équation du mouvement de M peut se mettre sous la forme

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0$$

et donner l'expression de ω_0 en fonction des données du problème.

3. Quelles sont les forces qui travaillent au cours du mouvement de M ? Établir alors l'expression de l'énergie potentielle totale $E_p(x)$ dont elles dérivent.
4. Tracer l'allure de cette fonction $E_p(x)$ et en déduire le domaine des valeurs de x accessibles au cours du mouvement.
5. Résoudre l'équation obtenue à la question 1. et vérifier la compatibilité du résultat avec celui de la question précédente.
6. On généralise l'étude précédente dans le cas où le point M , toujours astreint à se déplacer sur l'axe horizontal Ox est soumis à une résultante de forces qui dérive d'une énergie potentielle $E(x)$. On suppose qu'une position d'équilibre x_e existe pour M . Quelle propriété possède l'énergie potentielle en $x = x_e$? En étudiant les petits mouvements de M autour de sa position d'équilibre, obtenir une condition sur $\frac{d^2E}{dx^2}(x_e)$ pour que cet équilibre soit stable.
7. Dans l'exemple du pendule élastique précédent, où est sa position d'équilibre? Est-elle stable ou instable?

2 Oscillateur anharmonique : stabilité, instabilité, métastabilité

On considère la nouvelle configuration du pendule représentée sur la figure 2. Le point M est toujours astreint à se déplacer sur l'axe horizontal $x'Ax$ en ne subissant aucun frottement. L'origine des x est prise en A . L'étude se fera dans le référentiel galiléen où l'axe Ax est fixe.

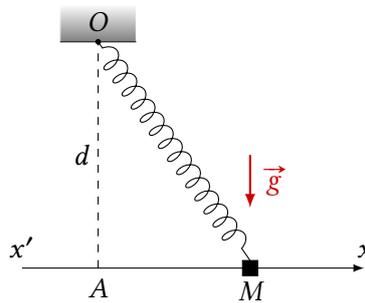


FIG. 2 : Oscillateur anharmonique

8. Établir le bilan des forces exercées sur le point M .
9. Montrer que la résultante de ces forces dans le référentiel d'étude dérive d'une énergie potentielle $E_p(x)$ que l'on calculera puis qu'on mettra sous la forme suivante :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k\ell_0^2 \left(\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2} - 1 \right)^2$$

Donner l'expression de α sachant que $\alpha > 0$.

10. Préciser les positions d'équilibre dans les cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$.
11. Tracer, dans chacun des cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$, l'allure de la fonction $E_p(x)$. Qu'en déduire quant à la stabilité des différentes positions d'équilibre ?
12. On considère le cas $\alpha > 1$. Déterminer l'équation des petits mouvements autour de la (les) position(s) d'équilibre stable(s). Exprimer la période T_{sup} des oscillations en fonction de k, m et α .
13. On considère le cas $\alpha < 1$. Déterminer l'équation des petits mouvements autour de la (les) position(s) d'équilibre stable(s). Exprimer la période T_{inf} des oscillations en fonction de k, m et α .
14. Interpréter la valeur obtenue pour T_{inf} lorsque $\alpha = 0$. Proposer également une explication physique pour les valeurs de T_{sup} et T_{inf} quand $\alpha \rightarrow 1$.

3 Un exemple d'état métastable : liquide surfondu

Le but est ici de comprendre comment un liquide peut exister sous forme liquide alors qu'il se trouve à une température inférieure à sa température de solidification, et comment une légère perturbation peut permettre de rompre cet équilibre.

On considère un système fermé (Σ) évoluant en contact avec le milieu extérieur assimilé à un thermostat de température constante T_0 et à un réservoir de pression à la pression P_0 . On note U l'énergie interne du système (Σ), S son entropie et V son volume. on suppose que le système subit une transformation au cours de laquelle il ne peut recevoir de l'énergie du milieu extérieur que sous forme de transfert thermique et de travail des forces pressantes.

15. Montrer qu'au cours de cette transformation

$$\Delta(U + P_0V - T_0S) \leq 0$$

16. Comment évolue la fonction $G^* = U + P_0V - T_0S$ sur une transformation monotherme et monobare (pression extérieure constante et pression initiale = pression finale = pression extérieure) ? Par analogie

avec l'énergie potentielle en mécanique, comment peut-on caractériser les états d'équilibre du système à l'aide de cette fonction ?

On considère maintenant un système diphasé (Σ_d) en équilibre avec le même milieu extérieur qui impose sa température T_0 et sa pression P_0 . Le système (Σ_d) est constitué de glace solide et d'eau liquide. La température T_0 est inférieure à la température T_f de fusion de la glace à la pression P_0 .

On considère le système représenté sur la figure 3 où un germe solide (glace) sphérique de rayon r se trouve dans un volume d'eau liquide. La masse totale du système (liquide + glace) vaut m .

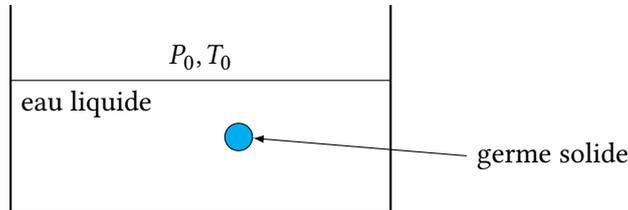


FIG. 3 : Germe de glace dans de l'eau liquide

On définit la fonction d'état *enthalpie libre* du système par $G = U + PV - TS$.

17. Pour le système considéré, les fonctions G et G^* sont-elles différentes ? L'enthalpie libre est-elle extensive ? Exprimer l'enthalpie libre G du système en fonction des enthalpies libres massiques de l'eau liquide g_l , de la glace g_s à la température T_0 et à la pression P_0 , de r , m et v_s où v_s est le volume massique de la glace à la température T_0 .
18. Dans les conditions de l'expérience, l'eau devrait être entièrement solide. Déterminer alors le signe de $g_s - g_l$.

On tient maintenant compte de la tension superficielle à l'interface entre le germe solide et d'eau liquide en ajoutant un terme $4\pi\gamma r^2$ à l'expression de l'enthalpie libre du système.

19. Donner la nouvelle expression de l'enthalpie libre G du système et représenter l'allure du graphe donnant les variations de G en fonction de r . Mettre en évidence un rayon r_c non nul qui rend G extrémal.
20. Exprimer r_c en fonction de $g_l - g_s$, γ et v_s .
21. Sans apport d'énergie, quelle est l'évolution du système considéré au départ ? On pourra étudier deux cas selon que $r > r_c$ ou $r < r_c$. En déduire qu'on peut aussi faire cesser la surfusion de l'eau par ajout de germes de glace solide.
22. On suppose que la pression P_0 est la pression atmosphérique et la température est T_0 . Pour cette température et cette pression, on a $|g_s - g_l| = 2 \times 10^1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, $v_s = 1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\gamma = 2 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Calculer r_c et commenter cette valeur.

On se place maintenant dans un récipient calorifugé contenant $m = 500 \text{ g}$ d'eau liquide surfondue à la température $T_0 = -10^\circ \text{C}$ à la pression atmosphérique.

En donnant un coup sur le récipient, on fait cesser la surfusion et on observe un nouvel état d'équilibre diphasé.

On donne :

- $l_f(T_f) = 3 \times 10^2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ enthalpie massique de fusion de la glace à pression atmosphérique,
- $c_{pl} = 4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ capacité thermique massique à pression constante pour l'eau liquide, supposée constante,
- variation d'entropie pour une phase condensée : $\Delta S = C_p \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$ où C_p est la capacité thermique de la phase condensée, T_i la température initiale et T_f la température finale.

23. Exprimer la masse respective de chacune des deux phases. Faire l'application numérique.
24. Calculer la variation d'entropie correspondante. Commenter.

25. Quelle devrait être la température initiale T_0 pour que la totalité de l'eau se solidifie après avoir fait cesser la surfusion? Commenter.

4 Stabilité d'un rayon lumineux

4.1 Modèle de l'optique géométrique

Un rayon lumineux traverse un système de N lentilles minces de rayon R , identiques, convergentes de vergence $C = 1/f'$, parallèles et régulièrement espacées d'une distance a sur le même axe optique (Ox).

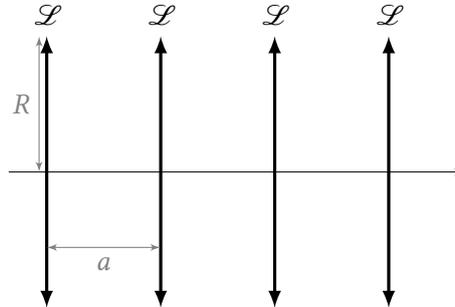


FIG. 4 : Association de N lentilles minces convergentes

On se place dans les conditions de Gauss pour toute cette étude.

26. Rappeler les conditions de Gauss. Quelles sont leurs conséquences?
27. Considérons l'une de ces lentilles. Le rayon lumineux arrive avec une incidence α , en un point de la lentille d'ordonnée y , il en ressort avec une inclinaison α' , comme indiqué sur la figure 5. Refaire cette construction en la justifiant, puis déterminer la relation entre α , α' , C et y .

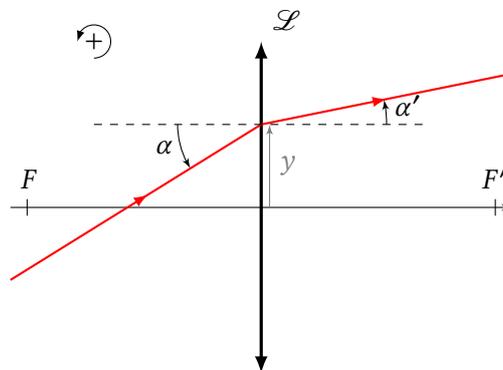


FIG. 5 : Paramétrage pour une lentille

On suppose que les lentilles sont très proches ($a \ll f'$) : l'angle α suit une évolution supposée continue que l'on caractérise par une fonction $\alpha(x)$. Avec cette notation, les angles de la question précédente deviennent :

$$\begin{cases} \alpha = \alpha(x) \\ \alpha' = \alpha(x + a) \end{cases}$$

28. Exprimer $\alpha(x + a)$ en fonction de $\alpha(x)$ à l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre 1. En déduire une équation reliant $\frac{d\alpha}{dx}$ et y .
29. Avec l'hypothèse $a \ll f'$, on considère que les points d'incidence sur les lentilles décrivent une courbe continue $y(x)$. Exprimer $y(x + a)$ en fonction de $y(x)$ et en déduire une relation entre α et $\frac{dy}{dx}$.
30. Déduire des deux questions précédentes l'équation de la trajectoire des rayons lumineux dans le système

de N lentilles. Montrer qu'elle se met sous la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

et donner l'expression de k .

31. Donner la trajectoire du rayon lumineux dont les conditions initiales sont $y(0) = 0, \alpha(0) = \alpha_0$. À quelle condition sur α_0 ce rayon reste-t-il guidé dans le système de N lentilles ?

4.2 Faisceau gaussien

Le modèle du faisceau cylindrique infiniment fin utilisé en optique géométrique n'a pas de réalité physique. Un modèle plus proche de la réalité est le *faisceau gaussien* : c'est une solution de l'équation de propagation de la lumière dans le vide **dans le cadre des conditions de Gauss**.

Dans ce modèle, l'énergie n'est pas concentrée dans un cylindre infini mais est répartie dans tout l'espace suivant la loi

$$I(r, z) = I_0 \left(\frac{W_0}{W(z)} \right)^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{W(z)^2}\right) \text{ avec } W(z) = W_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{L_R^2}} \text{ et } L_R = \frac{\pi W_0^2}{\lambda}$$

exprimée en coordonnées cylindriques. On voit ainsi que les données de la longueur d'onde λ et de la distance W_0 permettent de caractériser intégralement le faisceau gaussien.

32. Dans un plan à z fixé, tracer l'allure de l'évolution de I en fonction de r . Placer sur cette courbe la valeur maximale de l'intensité en donnant son expression ainsi que le point de coordonnées $r = W(z)$ sachant que $\exp(-2) \approx 0,14$. Justifier qu'on peut alors considérer que $W(z)$ représente le rayon du faisceau gaussien.
33. Représenter l'allure de l'évolution de $W(z)$ en fonction de z . Faire apparaître le point de coordonnée $z = L_R$ sur cette courbe. Que représente la longueur W_0 pour le faisceau gaussien ?
34. On note θ l'angle au sommet de divergence du faisceau gaussien (angle entre l'axe du faisceau et l'asymptote à la bordure du faisceau). Montrer que la pente de l'asymptote à la courbe $W(z)$ vaut $\frac{W_0}{L_R}$. En déduire θ en fonction de W_0 et de L_R .

On souhaite guider ce faisceau par un système de N lentilles analogue à celui étudié dans la partie 4.1. On admet que l'action d'une lentille sur l'enveloppe du faisceau est similaire à celle sur un rayon lumineux.

On commence par étudier le comportement pour une lentille convergente de distance focale f' . On souhaite que cette lentille transforme le faisceau divergent sous un angle θ en faisceau convergent sous un angle θ ainsi que schématisé sur la figure 6.

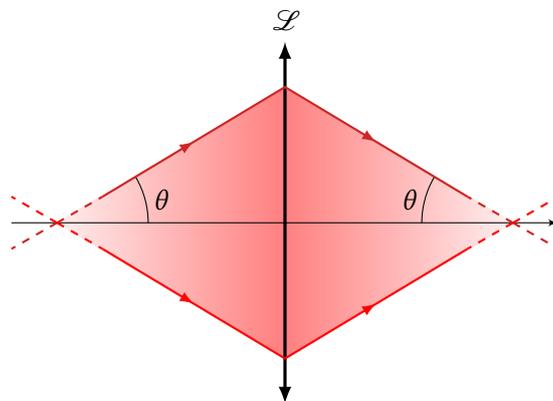


FIG. 6 : Refocalisation d'un faisceau divergent par une lentille

35. Quelle doit être la distance entre le point de rayon minimal du faisceau incident et le centre O de la lentille.
36. En déduire la géométrie du système de N lentilles permettant de réaliser le guidage du faisceau.
37. À quelle condition sur le rayon R des lentilles le faisceau reste-t-il effectivement guidé ?

5 Instabilité paramétrique

On étudie l'instabilité d'un oscillateur paramétrique dont un exemple très connu est le grand encensoir de la cathédrale de Saint-Jacques-de-Compostelle qu'on peut voir sur la figure 7.



FIG. 7 : Encensoir de Saint-Jacques-de-Compostelle

Cet encensoir de plus de 50 kg constitue un pendule suspendu sous le transept de la cathédrale. Le pendule est tout d'abord écarté de sa position d'équilibre verticale puis au cours des oscillations, un dispositif mécanique permet de faire varier la longueur ℓ de la corde qui le soutient. Sous l'action de huit tireurs (*tiraboleiros*), cette longueur est périodiquement diminuée puis augmentée de façon à faire croître rapidement l'amplitude des oscillations du pendule.

Juan Sanmartin Losada décrit ce dispositif dans le texte ci-dessous extrait d'un article de la revue *Pour la Science* (dossier hors-série « Le chaos » publié en janvier 1995, pages 55 à 57).

La physique de l'encensoir

Selon la légende, Galilée comprit les lois du pendule en regardant les oscillations d'un lustre dans une église italienne : il aurait certainement été plus inspiré par les formidables oscillations entretenues de l'encensoir de la cathédrale de Saint-Jacques-de-Compostelle.

5 Depuis sept siècles, un mécanisme ingénieux fait osciller cet encensoir géant, qui témoigne des connaissances empiriques des mécaniciens du Moyen Âge. Suspendu par une corde attachée au haut de la croisée de la cathédrale, l'encensoir gigantesque est dévié, d'une poussée, de sa position de repos verticale. Pendant qu'il se balance, huit hommes tirent sur une corde qui soulève l'encensoir lorsque celui-ci passe par la verticale et relâchent la corde quand l'encensoir est au plus haut. Les tireurs, sous les ordres d'un conducteur, amplifient ainsi les oscillations de l'encensoir, jusqu'à ce que celui-ci monte à une hauteur de 21 mètres, décrive un arc de
10 65 mètres de longueur, et passe en vrombissant à la vitesse de 19 mètres par seconde en un point situé à ras du sol.

Le dispositif mécanique a été amélioré depuis le XIIIe siècle. La structure supérieure actuelle, une carcasse en fer, a été édifiée en 1602, en remplacement du bâti en bois d'origine, qui masquait trop la lumière. Vissée en quatre points sur les grands piliers de la croisée, le dispositif moderne a, en son centre, deux tambours
15 de châtaignier, de 58 centimètres et 29 centimètres de diamètre, dont l'axe commun repose sur la carcasse métallique.

L'encensoir est aujourd'hui en laiton argenté. Plein de braises et d'encens, il pèse plus de 50 kilogrammes. La corde, dont une extrémité est nouée à l'encensoir, s'enroule d'abord autour du tambour de grand diamètre, puis autour du tambour de petit diamètre, et redescend vers le sol. Quand l'encensoir et la corde passent par la position verticale, les hommes tirent sur la corde qui fait tourner le petit tambour de plus d'un tour et demi, lequel entraîne le grand tambour et la même corde soulève ainsi l'encensoir d'environ trois mètres. Ce dispositif à double tambour amplifie les déplacements. Les tireurs relâchent la même longueur de corde lorsque l'encensoir atteint le point d'amplitude maximale. Après la poussée initiale, l'amplitude angulaire est d'environ 13 degrés. En 80 secondes et 17 demi-périodes d'oscillation de l'encensoir, l'amplitude maximale de 82 degrés est atteinte, l'encensoir atteignant un point situé à un demi-mètre sous la voûte.

En variant la longueur de la corde à laquelle est pendu l'encensoir, les tireurs augmentent l'énergie d'oscillation du pendule, comme un enfant sur une balançoire qui s'accroupit et se relève cycliquement pour se balancer plus fort. Cette amplification, qui consiste à faire varier un paramètre d'un oscillateur, s'appelle amplification paramétrique. Dans le cas de l'encensoir, lorsque la longueur de la corde varie, la tension de la corde exerce un travail ; le travail est positif et augmente l'énergie quand la corde est raccourcie, négatif dans le cas contraire. Au cours d'un cycle complet d'allongement et de raccourcissement de la corde, le bilan du travail de la tension peut être positif ou négatif.

L'accélération radiale pendant le mouvement de tirage résulte du déséquilibre entre la tension de la corde, la force centrifuge et le poids de l'encensoir. Comme il n'y a pas de mouvement radial avant ou après le tirage, le travail de la tension au cours d'un cycle (sauf lors du tirage) est égal et de signe opposé à la somme des travaux des deux autres forces. Le tirage de la corde augmente l'énergie de l'encensoir car, dans la position basse, la vitesse de l'encensoir et la force centrifuge sont maximales et le poids de l'encensoir est dirigé le long de la corde ; en ce point la tension de la corde est maximale. Dans la position haute, la force centrifuge est nulle et la composante du poids le long de la corde est faible, aussi la tension de la corde est presque nulle quand le point d'amplitude maximale correspond à un angle d'oscillation approchant 90 degrés. Le gain d'énergie résultant du tirage est maximal quand le raccourcissement de la corde est effectué instantanément au point le plus bas de la trajectoire et l'allongement de la corde réalisé au point le plus haut de la trajectoire.

Dans ce cas, le gain d'énergie relatif au cours d'une demi-période d'oscillation, est égal au triple du raccourcissement de la corde, divisé par sa longueur totale. On notera que ce gain relatif ne dépend pas de l'amplitude, de sorte que la résistance de l'air, négligeable à basse amplitude, peut finalement l'emporter sur le gain en énergie dû au tirage. Le gain absolu est petit à basse amplitude, et l'amplification requiert un temps inhabituellement long quand la poussée initiale est faible. Ce phénomène est bien connu du sacristain qui dirige l'équipe de tireurs.

-
38. Le texte indique (lignes 14 à 22) que grâce au système à deux tambours, les tireurs soulèvent l'encensoir de $\Delta l = 3$ m. Faire un schéma du dispositif à deux tambours et, avec les données numériques du texte, évaluer la valeur $\Delta l'$ de la longueur de corde tirée par les hommes. De même, en négligeant le moment d'inertie du système des deux tambours et la masse de la corde, exprimer la tension T' exercée par les hommes sur la corde en fonction des rayons des tambours et de la norme T de la tension exercée par la corde sur l'encensoir. Quels sont l'intérêt et l'inconvénient de ce système à deux tambours ?
39. On lit dans le texte aux lignes 33-34 : *l'accélération radiale pendant le mouvement de tirage résulte du déséquilibre entre la tension de la corde, la force centrifuge et le poids de l'encensoir*. Écrire le principe fondamental de la dynamique à l'encensoir pour y faire apparaître, en les identifiant, les quatre termes dont il est question dans cette phrase. L'auteur commet-il une erreur ?
40. Justifiez l'affirmation du texte relative aux signes du travail exercé par la corde des lignes 29 à 31 en précisant de quelle énergie il est question.
41. On note maintenant E l'énergie mécanique de l'encensoir, l'énergie potentielle étant prise nulle au point le plus bas de la trajectoire. W_f est l'énergie dissipée par les frottements sur un quart de période (entre le point le plus haut et le point le plus bas). Exprimer le rapport $\frac{W_f}{E}$ en fonction de la hauteur maximale h atteinte par le pendule, de sa vitesse v au passage par le point le plus bas, et de g . À partir de données numériques de l'énoncé, évaluez ce rapport. Qu'en conclure ?

On propose dans la suite un modèle de l'action optimale des tireurs schématisé ci-dessous.

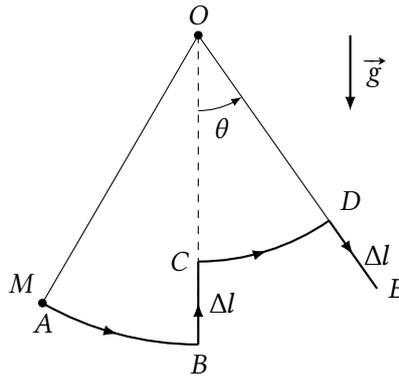


FIG. 8 : Modèle simplifié du tirage

On suppose que, par leur action, ils raccourcissent quasi-instantanément la longueur du pendule de Δl lorsque celui-ci passe par la position verticale ($\theta = 0$, entre B et C) et qu'ils laissent la corde s'allonger quasi-instantanément de Δl lorsque le pendule a atteint son angle maximal (entre D et E) et que sa vitesse s'annule (voir figure 8). On notera l_0 la plus grande longueur de la corde ($l_0 = OA = OB$ sur le schéma) et $l_0 - \Delta l$ la plus petite longueur de corde ($l_0 - \Delta l = OC = OD$ sur le schéma). On considèrera de plus que $\Delta l \ll l_0$. On négligera aussi la masse de la corde devant celle, notée m , de l'encensoir, considéré comme ponctuel, situé en M, et suspendu en bout de corde. On néglige aussi tout frottement.

42. En utilisant le théorème du moment cinétique, établir la relation entre les vitesses de l'encensoir v_B en B et v_C en C et les longueurs l_0 et $l_0 - \Delta l$.
43. Calculer aussi les variations d'énergie mécanique ΔE_{BC} entre les points B et C et ΔE_{DE} entre les points D et E en fonction de m , g , l_0 , Δl et θ . On se limitera à des expressions d'ordre 1 en Δl .
44. Proposer alors une démonstration de l'affirmation du texte des lignes 43 et 44 : *dans ce cas, le gain d'énergie relatif au cours d'une demi-période d'oscillation, est égal au triple du raccourcissement de la corde, divisé par sa longueur totale.*

Toujours dans le cadre de ce modèle, du fait du raccourcissement et de l'allongement successifs de la corde, l'amplitude des oscillations du pendule augmente comme schématisé sur la figure 9.

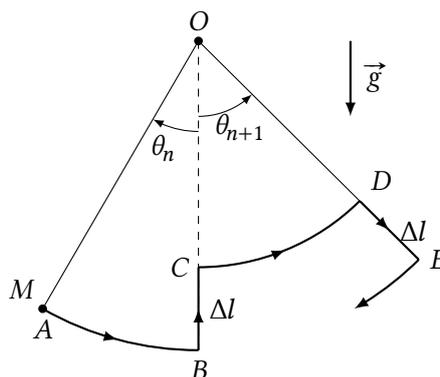


FIG. 9 : Amplitudes successives de l'oscillateur

45. Dédire de ce modèle une relation entre les angles maximaux successifs atteints, θ_n et θ_{n+1} , et l_0 et Δl . Établir la relation de récurrence sur $a_n = 1 - \cos \theta_n$ et montrer que $\theta_{n+1} > \theta_n$. En déduire l'expression de a_n en fonction de a_0 .
46. Pour l'encensoir de Saint-Jacques-de-Compostelle, $l_0 = 21$ m et $\Delta l = 3$ m. Montrer que ce modèle n'est pas compatible avec les observations décrites dans le texte aux lignes 23 à 25. Que pensez-vous du modèle proposé ? Quelles principales critiques peut-on lui faire ?