

Klass PCSI - Physique 1

Éléments de correction

1 Oscillateur harmonique

1. Dans le référentiel \mathcal{R} , le point M est soumis à :

- la force de rappel élastique \vec{F} ,
- son poids \vec{P} ,
- la réaction \vec{R} de la tige qui guide le mouvement selon \vec{u}_x .

2. La seule force sur l'axe \vec{u}_x est la force de rappel élastique :

$$\vec{F} = -k(x - \ell_0)\vec{u}_x$$

Le théorème de la quantité de mouvement appliqué à M dans \mathcal{R} en projection sur l'axe Ox donne :

$$m\ddot{x} = -k(x - \ell_0)$$

d'où :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\ell_0$$

Par identification avec la forme donnée dans l'énoncé :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3. \vec{P} et \vec{R} sont orthogonales au mouvement donc ne travaillent pas : seule la force \vec{F} travaille.

Le travail élémentaire de cette force est :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -k(x - \ell_0)dx$$

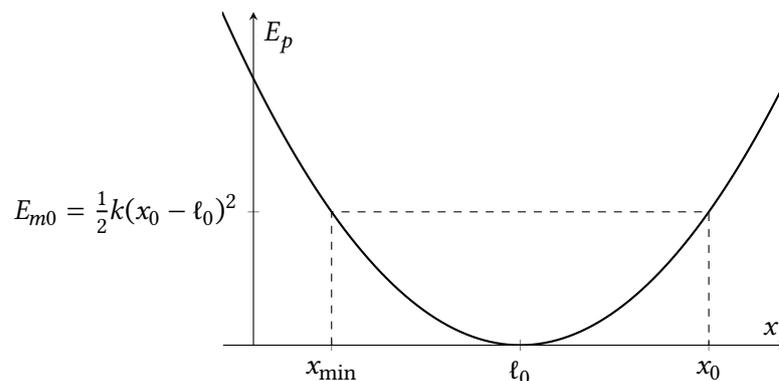
Ce travail s'intègre sans connaître le chemin suivi donc la force est conservative et dérive d'une énergie potentielle vérifiant :

$$\delta W = -dE_p$$

On en déduit :

$$E_p = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + C^{te}$$

4.



Le système étant conservatif son énergie mécanique se conserve et vaut donc l'énergie mécanique initiale :

$$E_{m0} = \frac{1}{2}k(x_0 - \ell_0)^2$$

Comme $E_m = E_c + E_p$ avec $E_c \geq 0$, les mouvements possibles vérifient $E_p \leq E_{m0}$ et sont donc compris entre x_{\min} et x_0 comme on peut le voir sur la courbe ci-dessus. Par symétrie, on a :

$$x \in [2\ell_0 - x_0; x_0]$$

5. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \ell_0$$

Avec les conditions initiales, on trouve :

$$\begin{cases} x(0) = x_0 = A + \ell_0 \\ \dot{x}(0) = 0 = \omega_0 B \end{cases}$$

On a donc :

$$x(t) = (x_0 - \ell_0) \cos(\omega_0 t) + \ell_0$$

La position du point M évolue donc bien entre $2\ell_0 - x_0$ et x_0 .

6. L'énergie potentielle **passé par un extremum local** au niveau de la position d'équilibre $x = x_e$ et sa dérivée $\frac{dE_p}{dx}(x_e)$ est donc nulle.

Pour les petits mouvements autour de la position d'équilibre, on peut effectuer un développement de Taylor d'ordre 2 de l'énergie potentielle :

$$E_p(x) = E_p(x_e) + \frac{1}{2}(x - x_e)^2 \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_e)$$

La position d'équilibre est stable si l'énergie potentielle passe par un minimum, ce qui revient mathématiquement à :

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_e) > 0$$

7. D'après la courbe de la figure 4, la position d'équilibre se situe en $x = \ell_0$ et elle est **stable**.

2 Oscillateur anharmonique

8. Dans le référentiel \mathcal{R} , le point M est soumis à :

- la force de rappel élastique \vec{F} ,
- son poids \vec{P} ,
- la réaction \vec{R} de la tige qui guide le mouvement selon \vec{u}_x .

9. Comme précédemment, la seule force qui travaille ici est la force de rappel élastique \vec{F} . On exprime l'énergie potentielle de cette force à l'aide du résultat de la question 3 :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + C^{\text{te}} \\ &= \frac{1}{2}k\left(\sqrt{d^2 + x^2} - \ell_0\right)^2 + C^{\text{te}} \\ &= \frac{1}{2}k\ell_0 \left(\sqrt{\left(\frac{d}{\ell_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2} - 1 \right)^2 + C^{\text{te}} \end{aligned}$$

On peut choisir arbitrairement une constante nulle :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k\ell_0 \left(\sqrt{\left(\frac{d}{\ell_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2} - 1 \right)^2$$

et par identification :

$$\alpha = \frac{d}{\ell_0}$$

10. Pour trouver les positions d'équilibre, dérivons cette énergie potentielle par rapport à x :

$$\begin{aligned} \frac{dE_p}{dx} &= k\ell_0^2 \left(\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2} - 1 \right) \frac{\frac{x}{\ell_0^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2}} \\ &= kx \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2}} \right) \end{aligned}$$

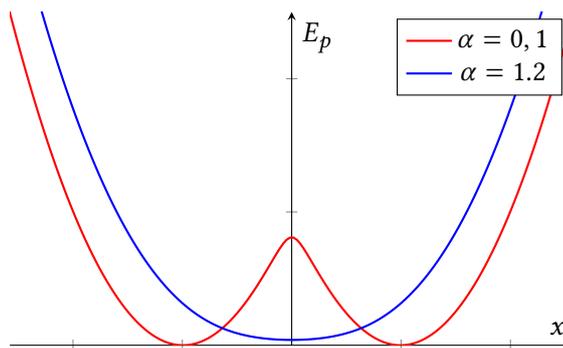
Cette dérivée s'annule pour $x_e = 0$ et cette position d'équilibre existe toujours, quelle que soit la valeur de α .

Pour annuler le terme entre parenthèse, on doit avoir :

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2 &= 1 \\ x^2 &= (1 - \alpha^2)\ell_0^2 \end{aligned}$$

On trouve ainsi une seconde annulation de la dérivée pour $x_e = \pm\ell_0\sqrt{1 - \alpha^2}$ mais cette position d'équilibre n'existe que si $\alpha \leq 1$.

11. Les allures de l'énergie potentielle sont les suivantes :



On voit que les positions d'équilibre $x_e = \pm\ell_0\sqrt{1 - \alpha^2}$ sont toujours stables si elles existent (pour $\alpha < 1$).

La position $x_e = 0$ est stable si elle est la seule position d'équilibre ($\alpha > 1$) et instable sinon.

12. Pour les deux questions suivantes, on utilise le développement de Taylor établi à la question 6.

La dérivée seconde de l'énergie potentielle est :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_p}{dx^2} &= k \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2}} \right) + kx \left(\frac{\frac{x}{\ell_0^2}}{\left(\alpha^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2\right)^{3/2}} \right) \\ &= k \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2}} + \frac{x^2}{\ell_0^2 \left(\alpha^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2\right)^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

Pour $\alpha > 1$, la position d'équilibre stable est $x_e = 0$, donc :

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2} = k \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) = k \left(1 - \frac{\ell_0}{d} \right)$$

L'énergie mécanique du système est alors :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k \left(1 - \frac{\ell_0}{d} \right) x^2$$

En dérivant par rapport au temps, on trouve l'équation différentielle du mouvement :

$$m \ddot{x} + k \left(1 - \frac{\ell_0}{d} \right) x = 0$$

On en déduit :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{\ell_0}{d} \right)} \quad \text{et} \quad T_{\text{sup}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{\ell_0}{d} \right)}}$$

13. Pour $\alpha < 1$, les positions d'équilibre stable sont $x_e = \pm \ell_0 \sqrt{1 - \alpha^2}$ donc :

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2} = k(1 - \alpha^2)$$

L'énergie mécanique du système est alors :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (1 - \alpha^2) (x - x_e)^2$$

En dérivant par rapport au temps :

$$m \ddot{x} + k(1 - \alpha^2) x = k(1 - \alpha^2) x_e$$

On en déduit :

$$T_{\text{inf}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} (1 - \alpha^2)}}$$

14. La situation $\alpha = 0$ correspond à $d = 0$ et donc à la situation étudiée en première partie. On trouve alors $T_{\text{inf}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ qui est bien identique à la période de l'oscillateur élastique horizontal.

Pour $\alpha \rightarrow 1$, les positions d'équilibre stables 0 et $\ell_0\sqrt{1 - \alpha^2}$ sont confondues et la dérivée seconde de l'énergie potentielle y est nulle : la courbe de l'énergie potentielle devient « plate » en 0 ce qui se traduit par l'absence de mouvement au voisinage de x_e et une période d'oscillation qui tend vers l'infini.

3 Un exemple d'état métastable : liquide surfondu

15. Le premier principe de la thermodynamique appliqué à (Σ) sur la transformation donne :

$$\Delta U = W + Q$$

La transformation étant monobare, on a :

$$W = - \int P_0 dV = -P_0 \Delta V$$

D'après le second principe sur la transformation monotherme :

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T_0} + S_{\text{créée}} \text{ avec } S_{\text{créée}} \geq 0$$

donc :

$$Q = T_0 \Delta S - S_{\text{créée}}$$

En réinjectant dans le premier principe :

$$\Delta U = -P_0 \Delta V + T_0 \Delta S - S_{\text{créée}}$$

$$\Delta U + P_0 \Delta V - T_0 \Delta S = -S_{\text{créée}}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\Delta(U + P_0 V - T_0 S) \leq 0}$$

16. D'après ce qui précède, la fonction G^* **diminue** au cours d'une transformation monobare et monotherme. Les états d'équilibre sont donc caractérisés par des **minima** (éventuellement locaux) de G^* .

17. Le contact mécanique avec l'extérieur impose à tout instant $P = P_0$. Si on suppose la transformation quasistatique, il y a à tout instant équilibre thermique donc on a aussi $T = T_0$.

On peut donc considérer que $G = G^*$.

L'enthalpie libre est la somme de trois termes extensifs (U , PV et TS) et est donc également **extensive**.

En utilisant cette extensivité, on a :

$$G = m_l g_l + m_s g_s$$

Ici, on a :

$$\begin{cases} m_l + m_s = m \\ m_s = \frac{4\pi r^3}{3v_s} \Rightarrow m_l = m - \frac{4\pi r^3}{3v_s} \end{cases}$$

On a donc :

$$\boxed{G = m g_l + \frac{4\pi r^3}{3v_s} (g_s - g_l)}$$

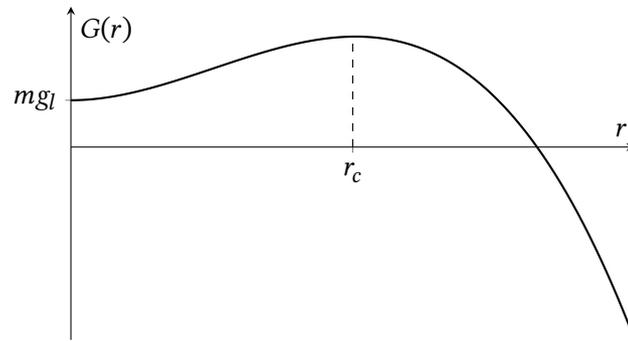
18. G devrait diminuer lorsque r augmente. On devrait donc avoir :

$$\boxed{g_s - g_l < 0}$$

19. On ajoute le terme de tension superficielle à l'enthalpie libre :

$$\boxed{G = m g_l + \frac{4\pi r^3}{3v_s} (g_s - g_l) + 4\pi \gamma r^2}$$

Le terme en r^2 est prépondérant pour les rayons faibles alors que le terme en r^3 devient prépondérant pour les rayons élevés. L'allure de la courbe est :



20. La dérivée de G est :

$$\frac{dG}{dr} = \frac{4\pi r^2}{v_s} (g_s - g_l) + 8\pi\gamma r = 4\pi r \left(\frac{g_s - g_l}{v_s} r + 2\gamma \right)$$

Outre pour $r = 0$, cette dérivée s'annule pour :

$$r_c = \frac{2\gamma v_s}{g_l - g_s}$$

21. Par analogie avec l'énergie potentielle, le système évolue de manière à diminuer son enthalpie libre. Si $r > r_c$, il y a alors augmentation de r : le liquide se solidifie entièrement. Si $r < r_c$, il y a diminution de r et le germe solide disparaît : le système reste à l'état de liquide surfondu.

Si on ajoute des germes de glace dans le système, on augmente artificiellement r jusqu'à dépasser r_c , provoquant ainsi la solidification du liquide.

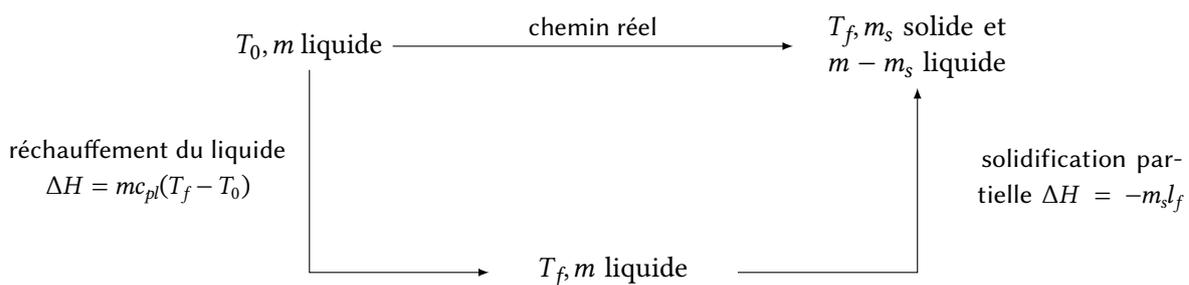
22. L'application numérique donne

$$r_c = 2 \text{ mm}$$

Ce rayon est assez important, ce qui explique qu'il est possible de maintenir de l'eau à l'état surfondu après sa sortie du congélateur.

23. La transformation est monobare adiabatique : le premier principe donne $\Delta H = 0$.

Compte-tenu de la question posée, on suppose que l'état final correspond à un état diphasé à la température de fusion T_f . Pour exprimer ΔH , considérons la transformation fictive au cours de laquelle le fluide se réchauffe à la température T_f avant de se solidifier.



On trouve alors :

$$\Delta H = 0 = mc_{pl}(T_f - T_0) - m_s l_f$$

Donc :

$$m_s = mc_{pl} \frac{T_f - T_0}{l_f} \quad \text{AN : } m_s = 65 \text{ g}$$

et la masse de liquide restant est $m_l = 435 \text{ g}$.

24. En utilisant le chemin fictif présenté ci-dessus, on peut exprimer la variation d'entropie sur la transformation :

$$\Delta S = \underbrace{mc_{pl} \ln \frac{T_f}{T_0}}_{\text{phase condensée}} - \underbrace{m_s \frac{l_f}{T_f}}_{\text{changement d'état}}$$

L'application numérique donne :

$$\Delta S = 1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

25. Si tout le liquide se solidifie, la variation d'enthalpie de la question 23 devient :

$$0 = m [c_{pl}(T_f - T_0) - l_f]$$

Donc :

$$T_0 = T_f - \frac{l_f}{c_{pl}} \quad T_0 = 198 \text{ K}$$

Si cette température peut-être atteinte de manière industrielle, elle est inaccessible avec un équipement domestique. On remarque par ailleurs que cette température est indépendante de la masse d'eau à solidifier.

4 Stabilité d'un rayon lumineux

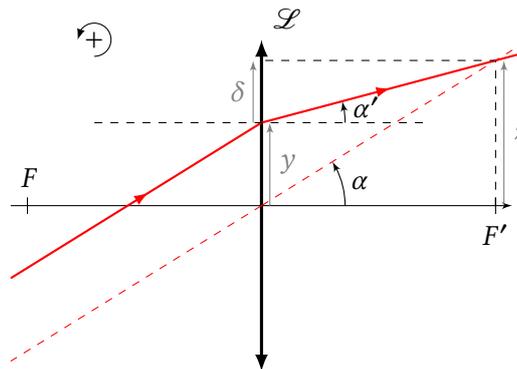
4.1 Modèle de l'optique géométrique

26. Dans les conditions de Gauss, les rayons incidents sur les lentilles :

- sont peu inclinés par rapport à l'axe optique (angle tel que $\tan \theta \sim \theta$),
- passent par des points peu éloignés de l'axe optique (distance petite devant les rayons de courbure des dioptries).

Dans ces conditions, les lentilles réalisent le stigmatisme et l'aplanétisme approchés.

27. Pour construire le rayon émergent, on trace le rayon fictif parallèle au rayon incident passant par le centre O de la lentille. Le rayon sortant passe par l'intersection entre ce rayon fictif et le plan focal image.



Dans les conditions de Gauss, on a :

$$\begin{aligned} y &= z - \delta \\ z &= f' \alpha \\ \delta &= f' \alpha' \end{aligned}$$

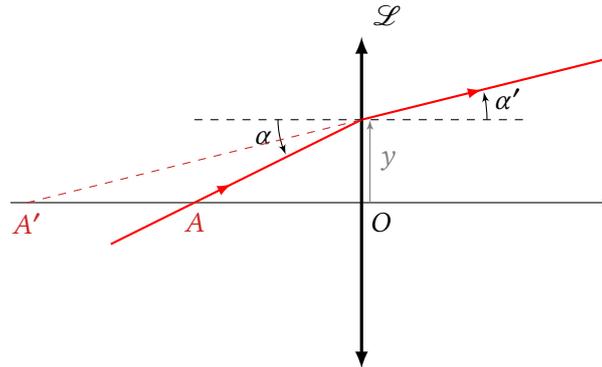
On en déduit donc :

$$y = f'(\alpha - \alpha') \Rightarrow \alpha - \alpha' = Cy$$

Remarque :

Il est également possible de trouver cette relation en utilisant les relations de conjugaison. Comme elles n'étaient pas fournies, cette solution était à éviter.

On note A (resp. A') le point d'intersection entre l'axe optique et le rayon incident (resp. émergent).



Dans les conditions de Gauss :

$$\alpha = -\frac{y}{OA} \quad \text{et} \quad \alpha' = -\frac{y}{OA'}$$

La relation de conjugaison au centre (loi de Descartes) donne :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = C \Rightarrow -\frac{\alpha'}{y} + \frac{\alpha}{y} = C$$

Finalement :

$$\boxed{\alpha - \alpha' = Cy}$$

28. Le développement de Taylor donne :

$$\boxed{\alpha(x+a) = \alpha(x) + a \frac{d\alpha}{dx}}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{C}{a}y}$$

29. Comme précédemment :

$$y(x+a) = y(x) + a \frac{dy}{dx}$$

Et, toujours dans les conditions de Gauss :

$$\alpha(x) = \frac{y(x+a) - y(x)}{a}$$

Donc :

$$\boxed{\alpha = \frac{dy}{dx}}$$

30. En combinant les résultats des deux questions précédentes :

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{C}{a}y = 0 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{C}{a}}}$$

31. L'équation de la trajectoire du rayon lumineux est de la forme :

$$y(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

et avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} y(0) = 0 = A \\ \alpha(0) = \alpha_0 = \frac{dy}{dx}(0) = kB \end{cases}$$

on en déduit :

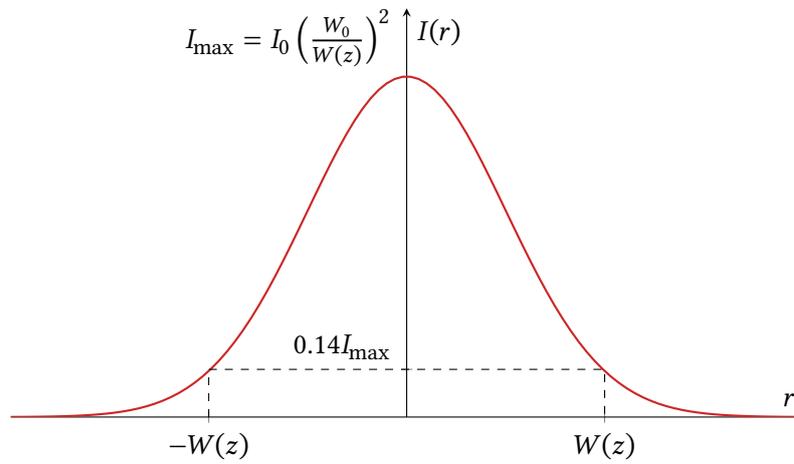
$$y(x) = \frac{\alpha_0}{k} \sin(kx)$$

Le rayon reste guidé tant que son éloignement à l'axe est inférieur à R . Cette condition se traduit par :

$$\frac{\alpha_0}{k} < R$$

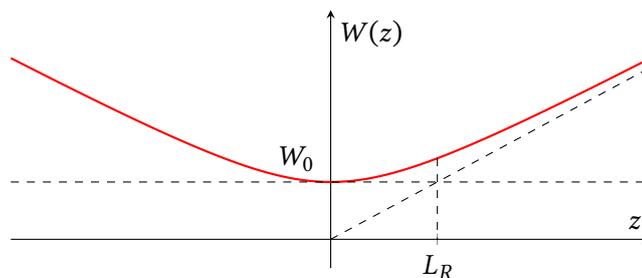
4.2 Faisceau gaussien

32. L'allure de la courbe est la suivante :



Pour $r > W(z)$, l'énergie du faisceau représente moins de 15% de l'énergie au centre : on peut considérer que la totalité de l'énergie est contenue dans le cylindre de rayon $W(z)$.

33. L'allure de la courbe est la suivante :



W_0 représente le **rayon minimal** du faisceau gaussien.

34. On a :

$$\frac{dW}{dz} = W_0 \frac{\frac{z}{L_R^2}}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{L_R^2}}} = \frac{W_0}{L_R} \frac{z}{\sqrt{L_R^2 + z^2}}$$

Pour z grand, cette dérivée correspond à la pente de l'asymptote p et vaut bien :

$$p = \frac{W_0}{L_R}$$

Dans l'approximation de Gauss :

$$\theta = \frac{W_0}{L_R}$$

35. D'après la figure 6, on veut $\theta' = -\theta$. D'après la question 27, cela donne : $2\theta = Cy$. La position x du point de rayon minimal vérifie alors : $\theta \sim \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{2\theta f'}{x}$.

On en déduit :

$$x = 2f'$$

Remarque :

On pouvait également trouver ce résultat avec les relations de conjugaison. On veut avoir $\overline{OA'} = -\overline{OA}$. D'après la loi de Descartes, on a donc $\overline{OA'} = 2f'$.

Le point de rayon minimal doit donc être situé à $2f'$ de la lentille.

36. Pour assurer la répétition du schéma de la figure 6, la distance a entre deux lentilles doit maintenant vérifier :

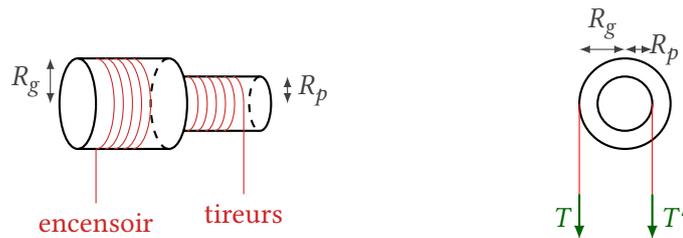
$$a = 4f'$$

37. Le faisceau reste guidé si son rayon au niveau des lentilles est inférieur à R : $W_0 \sqrt{1 + \frac{4f'^2}{L_R^2}} < R$. On a alors :

$$W_0 \sqrt{1 + \frac{4f'^2}{L_R^2}} < R$$

5 Instabilité paramétrique

38. Le schéma du dispositif est le suivant :



Notons N le nombre de tours effectués par le tambour sur un tirage. On a :

$$\Delta l = N2\pi R_g \text{ et } \Delta l' = N2\pi R_p$$

On en déduit donc :

$$\Delta l' = \Delta l \frac{R_p}{R_g} \Rightarrow \Delta l' = 1,5 \text{ m}$$

Le théorème du moment cinétique appliqué au système {cylindre + corde} donne :

$$0 = TR_g - T'R_p$$

donc :

$$T' = T \frac{R_g}{R_p} = 2T$$

Le système à double tambour permet au tireurs de tirer une longueur de corde deux fois plus faible que le mouvement vertical de l'encensoir, mais cela se fait au prix du doublement de la force à exercer sur la corde.

39. Les forces exercées sur l'encensoir sont :

- son poids \vec{P} ,
- la tension de la corde \vec{T} .

Le texte fait référence au mouvement de tirage, c'est-à-dire au passage de l'encensoir par la verticale. À cet instant, toutes les forces sont colinéaires, et le PFD en projection sur \vec{u}_r donne :

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = P - T$$

Si on sépare l'accélération en terme centripète (\ddot{r}) et centrifuge ($r\dot{\theta}^2$), on retrouve les quatre termes dont parle l'auteur :

$m\ddot{r}$	=	$m r \dot{\theta}^2$	+	$m \underline{g}$	-	\underline{T}
accélération radiale		force centrifuge		poids		tension de la corde

L'auteur confond ici l'accélération radiale et la variation de longueur de la corde.

40. Lorsque la corde est raccourcie, le déplacement radial de l'encensoir est dans le même sens que la tension de la corde donc le travail de cette tension est **moteur** (positif); l'énergie qui varie ainsi est l'**énergie mécanique** de l'oscillateur.

41. Le théorème de l'énergie mécanique appliqué au pendule entre le point le plus haut et le point le plus bas donne :

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgh = -W_f$$

En notant $E = mgh$ l'énergie mécanique *au début du mouvement*, on trouve :

$$W_f = E - \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{W_f}{E} = 1 - \frac{v^2}{2gh}$$

Aux lignes 9 et 10, le texte donne $v = 68 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et $h = 21 \text{ m}$. L'application numérique donne :

$$\frac{W_f}{E} = 1 - \frac{361}{2 \cdot 9,8 \cdot 21} \approx 1 - \frac{36}{2 \cdot 21} \approx 1 - \frac{6}{7} = 0,14$$

Les frottements sont loin d'être négligeables car ils représentent plus de 10% de perte d'énergie.

42. Lors du passage par la verticale (points B et C), les moments des forces exercées sur le pendule sont nuls. Le moment cinétique doit donc être conservé entre B et C :

$$m l_0 v_B = m(l_0 - \Delta l) v_C$$

On en déduit :

$$l_0 v_B = (l_0 - \Delta l) v_C$$

43. La variation d'énergie potentielle entre B et C est $\Delta E_p = mg\Delta l$.

Pour la variation d'énergie cinétique, on a :

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \frac{1}{2}m(v_C^2 - v_B^2) \\ &= \frac{m}{2}v_C^2 \left[1 - \left(\frac{l_0 - \Delta l}{l_0} \right)^2 \right] \\ &\approx m v_C^2 \frac{\Delta l}{l_0} \text{ à l'ordre 1} \end{aligned}$$

La conservation de l'énergie mécanique entre les points C et D donne :

$$v_C^2 = 2g(l_0 - \Delta l)(1 - \cos \theta)$$

Donc :

$$\Delta E_{BC} = mg\Delta l \left(3 - 2 \cos \theta \left(1 - \frac{\Delta l}{l_0} \right) \right)$$

Entre les points D et E , seule l'énergie potentielle varie car la vitesse de l'encensoir est supposée nulle :

$$\Delta E_{DE} = mgl_0(1 - \cos \theta) - mg(l_0 - (l_0 - \Delta l) \cos \theta) \Rightarrow \Delta E_{DE} = -mg\Delta l \cos \theta$$

44. Au cours de la demi-période $A \rightarrow E$, la variation totale d'énergie mécanique est ainsi :

$$\begin{aligned}\Delta E &= \Delta E_{BC} + \Delta E_{DE} \\ &= mg\Delta l \left(3 - 2 \cos \theta \left(1 - \frac{\Delta l}{l_0} \right) \right) - mg\Delta l \cos \theta \\ &= mg\Delta l \left(3 - 3 \cos \theta + 2 \frac{\Delta l}{l_0} \cos \theta \right) \\ &\simeq 3mg\Delta l (1 - \cos \theta)\end{aligned}$$

Or, l'énergie mécanique en E est $mg l_0 (1 - \cos \theta)$. On a donc bien :

$$\boxed{\frac{\Delta E}{E} = 3 \frac{\Delta l}{l_0}}$$

45. D'après ce qui précède, on a :

$$mg l_0 (1 - \cos \theta_{n+1} - 1 + \cos \theta_n) = 3mg\Delta l (1 - \cos \theta_{n+1})$$

Donc :

$$\boxed{\cos \theta_n - \cos \theta_{n+1} = 3 \frac{\Delta l}{l_0} (1 - \cos \theta_{n+1})}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= 3 \frac{\Delta l}{l_0} a_{n+1} \\ a_{n+1} \left(1 - 3 \frac{\Delta l}{l_0} \right) &= a_n \\ a_{n+1} &= \left(1 + 3 \frac{\Delta l}{l_0} \right) a_n\end{aligned}$$

On a $1 + \frac{3\Delta l}{l_0} > 1$ donc la suite est croissante. On en déduit que $\cos \theta_n > \cos \theta_{n+1}$. La fonction \cos étant strictement décroissante sur $[0, \pi]$, on a donc $\theta_{n+1} > \theta_n$.

Le terme général de la suite est :

$$\boxed{a_n = \left(1 + 3 \frac{\Delta l}{l_0} \right)^n a_0}$$

46. Cherchons le nombre de demi-périodes k nécessaires pour atteindre $a_k = 1 - \cos(82^\circ)$:

$$\boxed{k = \frac{\ln \left(\frac{a_k}{a_0} \right)}{\ln \left(1 + 3 \frac{\Delta l}{l_0} \right)}}$$

Avec les valeurs numériques approchées fournies dans l'énoncé, on trouve :

$$\boxed{k \simeq 10}$$

Le modèle proposé sous-estime le nombre d'oscillations nécessaires pour atteindre l'amplitude maximale de 82° . Les principales améliorations que l'on peut proposer sont :

- la prise en compte des frottements,
- la prise en compte du temps de tirage et de relâchement de la corde.