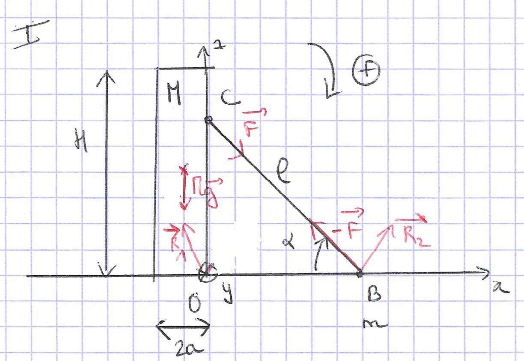
CORRECTION CHUTE D'ARBRE

I



$$\begin{cases} \vec R_1 = T_1 \vec u_x + N_1 \vec u_z \\ \vec R_2 = T_2 \vec u_x + N_2 \vec u_z \end{cases} \qquad f$$

1) Le câble étant sans masse, le câble exerce sur le bûcheron assimilé à un point matériel la force $-\vec F$

TQM appliqué au bûcheron dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\vec 0 = -\vec F + m\vec g + \vec R_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = -F\cos\alpha + T_2 \\ 0 = F\sin\alpha - mg + N_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} T_2 = F\cos\alpha > 0 \\ N_2 = mg - F\sin\alpha \end{matrix}}$$

Le bûcheron ne glisse pas si effectivement $|T_2| < f|N_2|$

Par ailleurs, comme il y a contact $N_2 = \underline{mg - F\sin\alpha} > 0$

$$\Leftrightarrow F < \frac{mg}{\sin\alpha}$$

Ainsi $F\cos\alpha < f(mg - F\sin\alpha)$

$$\Leftrightarrow F(\cos\alpha + f\sin\alpha) < f mg$$

$$\Leftrightarrow F < f\frac{mg}{\cos\alpha + f\sin\alpha} \qquad \boxed{F_{max} = \frac{f mg}{\cos\alpha + f\sin\alpha}}$$

2) On considère maintenant comme système l'arbre.

Théorème de la quantité appliqué à l'arbre supposé au repos dans le réf. terrestre supposé galiléen :

$$\vec 0 = M\vec g + \vec F + \vec R_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = F\cos\alpha + T_1 \\ 0 = -Mg + N_1 - F\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} T_1 = -F\cos\alpha < 0 \\ N_1 = Mg + F\sin\alpha > 0 \end{matrix}}$$

Le glissement n'est pas possible en O si $|T_1| < f|N_1|$

$$\Leftrightarrow F\cos\alpha < f(Mg + F\sin\alpha)$$

$$\Leftrightarrow F(\cos\alpha - f\sin\alpha) < fMg$$

- Si $\cos\alpha - f\sin\alpha > 0$ alors $\Leftrightarrow F < \dfrac{fMg}{\cos\alpha - f\sin\alpha} = F_0$ avec $\alpha : 0 \to \pi/2$

or $F_{max} = \dfrac{fmg}{\cos\alpha + f\sin\alpha} < \dfrac{fMg}{\cos\alpha + f\sin\alpha} < \dfrac{fMg}{\cos\alpha - f\sin\alpha} = F_0$

En effet $m < M$ et $\cos\alpha + f\sin\alpha > \cos\alpha - f\sin\alpha$

$\Leftrightarrow 2f\sin\alpha > 0$, ce qui est le cas pour $\alpha \in [0, \pi/2]$

Ainsi $F_{max} < F_0$

et si $F < F_{max}$ alors nécessairement $F < F_0$

- Si $\cos\alpha - f\sin\alpha < 0$ la condition est vérifiée tout le temps

En conclusion si $\underline{F < F_{max}}$, le glissement n'est pas possible en O.

3) $\boxed{\Gamma_g = -Mg.a}$ en utilisant le bras de levier

4) Appliquons un théorème du moment cinétique à l'arbre dans le référentiel terrestre supposé galiléen par rapport à (Oy)

$$J\ddot{\theta} = \Gamma_g + \Gamma_B + \underbrace{0}_{\text{moment \% (Oy) de } \vec{R_1}}$$

On en déduit la valeur minimale de Γ_B pour que l'arbre pivote :

$$\boxed{\Gamma_B > Mga} \qquad \boxed{\Gamma_{B\,min} = Mga}$$

5) En utilisant à nouveau le bras de levier pour $\vec{F}$ il vient.

$$\Gamma_B = +(F\cos\alpha).OC = F\cos\alpha\,\ell\sin\alpha = \boxed{\frac{F\ell}{2}\sin 2\alpha = \Gamma_B}$$

On en déduit que Γ_B est maximale pour $\sin 2\alpha = 1$

soit pour $\boxed{\alpha = \pi/4}$

6) $\Gamma_B = F\ell\sin\alpha\cos\alpha = F_{max}.\ell\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{\ell\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha} fmg$

$$\Gamma_B = \frac{fmg\ell}{\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{f}{\cos\alpha}} = \frac{mg\ell}{\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{f\sin\alpha}} = \frac{mg\ell}{\varphi(\alpha)}$$

Γ_B est maximale si $\varphi(\alpha)$ est minimale $\qquad \varphi(\alpha) = \dfrac{1}{\cos\alpha} + \dfrac{1}{f\sin\alpha}$

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = -\frac{1}{\cos^2\alpha}(-\sin\alpha) - \frac{1}{f\sin^2\alpha}\cos\alpha$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{f}\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = 0 \iff \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{f}\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\iff f\sin^3\alpha = \cos^3\alpha$$

$$\iff \boxed{\alpha = \text{atan}\left(1/f^{1/3}\right)}$$

Il faudrait vérifier qu'il s'agit bien d'un minimum...

Pour $f = 1,0$ on trouve $\underline{\alpha = \pi/4}$

7) $F_{max} = \dfrac{fmg}{\cos\alpha + f\sin\alpha}$ AN $\dfrac{1 \,.\, 1\,10^2 \,.\, 1\,10}{1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}} = \dfrac{10^3}{2/\sqrt{2}} = \dfrac{10^3}{\sqrt{2}}$

$$\underline{F_{max} = 7\,10^2\,N}$$

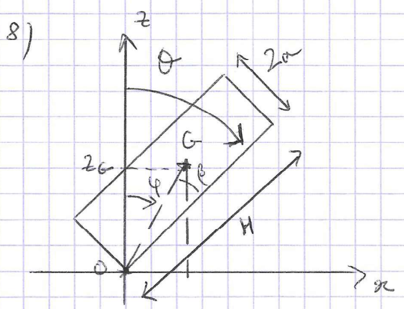
On veut $\Gamma_B = \dfrac{F_{max}\ell}{2}\sin 2\alpha_m' > Mga$

$$\iff \ell > \frac{2Mga}{F_{max}\sin 2\alpha_m'}$$

AN $\ell > \dfrac{2.1\,10^3.1\,10.\,0,5}{7.10^2} = 1,4\,10^1\,m$

$$\underline{\ell_{min} = 1.10^1\,m}$$

8)

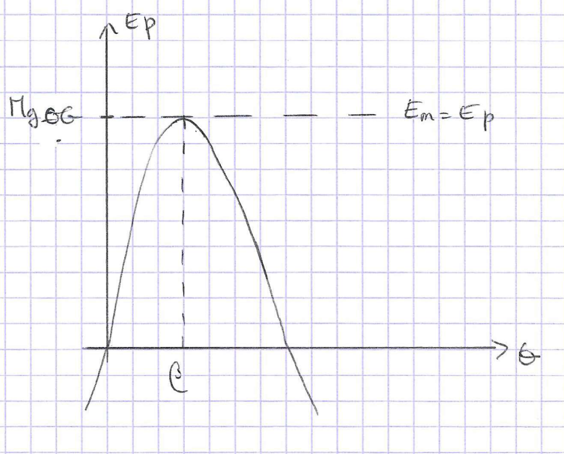


$E_p = Mg z_G$

$$\begin{cases} z_G = OG\cos\varphi \\ \text{avec } \theta = \varphi + \beta \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{E_p = Mg\,OG\cos(\theta - \beta)} = Mg\,OG\left[\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta\right]$

avec $\cos\beta = \dfrac{H/2}{\sqrt{a^2 + H^2/4}}$ et $\sin\beta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+H^2/4}}$ $\quad OG = \sqrt{a^2 + \dfrac{H^2}{4}}$



Le bûcheron peut lâcher l'arbre à partir de l'angle $\theta = \theta_s$.
A partir du moment où le bûcheron lâche l'arbre, ce dernier n'est soumis qu'à :
- son poids, force conservative
- réaction $\vec{R}_1$ qui ne travaille pas si absence de glissement

Donc l'arbre constitue alors un système conservatif qui a pour énergie potentielle $E_p = Mg\,OG\cos(\theta - \beta)$. Si à l'instant initial, l'arbre n'a pas de vitesse initiale et est à la position $\theta = \beta^+$, il chute vers les θ croissants. $E_m = E_p(\beta)$

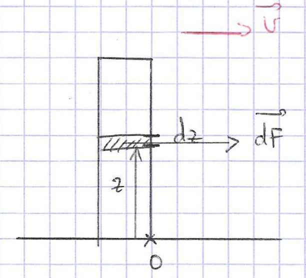
On en déduit $\boxed{\theta_s = \beta = \operatorname{atan}\left(\dfrac{2a}{H}\right)}$

On peut également reformuler $E_p(\theta)$

$$\boxed{E_p(\theta) = Mg\left[\cos\theta\,\frac{H}{2} + \sin\theta\, a\right]}$$

II

9) Ordre de grandeur de U pour un vent violent : $U \simeq 100\,km/h$



$d\Gamma_v = 2aC_x\rho_a U^2 dz\, \underset{\sim}{z}$

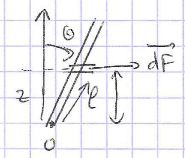
bras de levier associé à $\vec{dF}$

$$\Gamma_v = 2aC_x\rho_a U^2 \int_0^H dz\, z$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Gamma_v = aC_x\rho_a U^2 H^2}$$

10) La dépendance en $\cos\theta$ peut intervenir de 2 manières différentes :

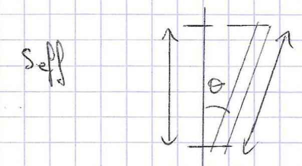
→ la dépendance via le <u>bras de levier</u> :



bras de levier $z = \ell\cos\theta$

Lorsque $\theta = \pi/2$ $\quad \Gamma_v = 0$

→ la dépendance via la <u>surface effective</u> que voit le vent : plus l'angle θ est important et moins l'arbre aura de "prise" du vent.



Surface effective $=$ Seff $= S\cos\theta$

On en déduit que Γ_v doit être <u>proportionnel à</u> $(\cos\theta)^2$

11) $\Gamma_R = \Gamma_0\left(\rho + 4\frac{\theta}{\theta_c} - 5\frac{\theta^2}{\theta_c^2}\right)$ $\quad \Gamma_0 < 0$

On veut $\Gamma_R(0^+) = \Gamma_0\rho = \Gamma_0$ D'où $\boxed{\rho = 1}$

Par ailleurs $\Gamma_0\left(1 + 4\frac{\theta_c}{\theta_c} - 5\frac{\theta_c^2}{\theta_c^2}\right) = 0$

$= \Gamma_0(1 + 4 - 5) = 0$ On prend $\boxed{\theta_c = 10°}$

$\frac{d\Gamma_R}{d\theta} = \Gamma_0\left(\frac{4}{\theta_c} - \frac{10\theta}{\theta_c^2}\right) = 0$ pour $\theta = \frac{4}{10}\theta_c = \frac{2}{5}\theta_c$

$\boxed{\frac{\theta_m}{\theta_c} = 2/5}$

Le minimum est alors égal à $\Gamma_m/\Gamma_0 = 1 + 4\cdot\frac{2}{5} - 5\cdot\frac{4}{25}$

$\boxed{\frac{\Gamma_m}{\Gamma_0} = \frac{9}{5}}$

Théorème du moment cinétique appliqué à l'arbre % (O_y) :

$J\ddot{\theta} = \Gamma_v + \Gamma_r$ $\qquad p = \Gamma_v/|\Gamma_0|$

12) En $\theta = 0$ l'arbre peut rester en équilibre si $\Gamma_v + \Gamma_r(0) = 0$

$\iff \Gamma_r(0) = -\Gamma_v$

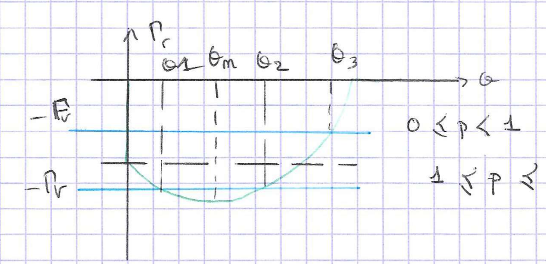
Ceci est possible si $0 < \Gamma_v \leqslant |\Gamma_0|$ ou encore si $\boxed{0 < p \leqslant 1}$

De la même façon, il y a équilibre possible en $\theta \neq 0$ si $\Gamma_v = -\Gamma_r(\theta)$

Or pour $0 < \theta \leqslant \theta_c$, $\frac{9}{5}\Gamma_0 \leqslant \Gamma_r \leqslant 0$

Il existe donc un équilibre possible en $\theta \neq 0$ si $0 < \Gamma_v \leqslant -\frac{9}{5}\Gamma_0$

donc si $0 \leqslant p \leqslant \frac{9}{5}$



pour $0 \leqslant p \leqslant 1$, il existe 2 positions d'équilibre possibles : en $\theta = 0$ et $\theta = \theta_3$

Pour $1 \leqslant p < \frac{9}{5}$, il " " $\theta = \theta_1$ et $\theta_2 = \theta_3$

Pour $p = 9/5$, il existe une position d'équilibre $\theta = \theta_m$.

Il reste à étudier la stabilité des positions d'équilibre

Γ_v est supposé indépendant de θ. Si θ augmente à partir d'une position d'équilibre il faut $\Gamma_v + \Gamma_r$ deviennent négatif pour que θ_{eq} soit stable

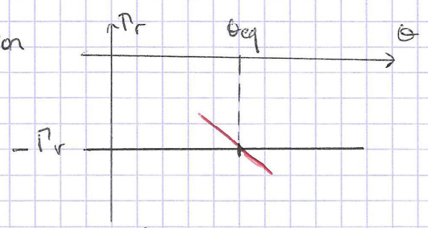
$\Gamma_v + \Gamma_r(\theta) < 0$

$\iff \Gamma_r(\theta) < -\Gamma_v$

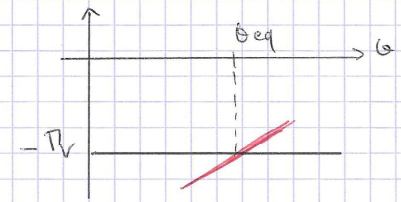
De même si θ_{eq} est stable lorsque θ diminue, on veut $\Gamma_v + \Gamma_r(\theta) > 0$

soit $\Gamma_r > -\Gamma_v$

Conclusion



θ_{eq} STABLE



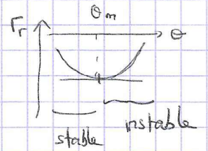
θ_{eq} INSTABLE

On en déduit

▷ $0 \le p < 1$: $\begin{cases} \theta = \theta_3 & \text{équilibre instable.} \\ \theta = 0 & \underline{\text{équilibre stable}} \end{cases}$

▷ $1 \le p < \frac{9}{5}$: $\begin{cases} \theta = \theta_1 & \underline{\text{équilibre stable}} \quad < \theta_m \\ \theta = \theta_2 & \text{équilibre instable} \end{cases}$

▷ si $p = \frac{9}{5}$



globalement la position en $\theta = \theta_m$ est <u>instable</u>

▷ pour $p > 9/5$ <u>pas de position d'équilibre</u>

On peut invoquer 2 raisons qui pourraient expliquer que l'on ne peut pas être certain que l'arbre résiste au vent :

— en présence de rafales, de vitesse potentiellement très supérieure à U, le couple Γ_v peut temporairement dépasser Γ_m et ainsi arracher l'arbre.

— l'arbre peut osciller autour de la position d'équilibre. Si l'amplitude de des oscillations est trop grande, θ devient supérieur à θ_m et l'arbre tombe.

19)

On a écrit question 18 : $J\ddot{\theta} = \Gamma_v + \Gamma_r(\theta)$

On multiplie termes de gauche et droite par $\dot{\theta}$, il vient en intégrant

$$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - \underbrace{\frac{1}{2}J\dot{\theta}(0)}_{0} = \Gamma_v(\theta - \underbrace{\theta(0)}_{0}) + \int_0^t \Gamma_r(\theta)\dot{\theta}\,dt$$

$$\int \Gamma_r \dot{\theta}\,dt = \Gamma_0 \int_0^t \left(\beta + 4\frac{\theta}{\theta_c} - 5\frac{\theta^2}{\theta_c^2}\right)\dot{\theta}\,dt$$

$$= \Gamma_0\beta(\theta - 0) + \frac{4\Gamma_0}{\theta_c}\left(\frac{\theta^2(t)}{2} - 0\right) - \frac{5\Gamma_0}{\theta_c^2}\left(\frac{\theta^3}{3} - 0\right)$$

On en déduit $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = |\Gamma_0|\left(p\theta - \theta - \frac{2}{\theta_c}\theta^2 + \frac{5}{3\theta_c^2}\theta^3\right)$

$$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = |\Gamma_0|\,\theta\left[(p-1) - \frac{2}{\theta_c}\theta + \frac{5}{3\theta_c^2}\theta^2\right]$$

On en déduit $\boxed{P(u) = (p-1) - 2u + \frac{5}{3}u^2}$

On peut faire un raisonnement similaire à ce que l'on fait dans le cours de mécanique à un degré de liberté conservatif.

$$\underbrace{\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2}_{\ge 0} - \underbrace{|\Gamma_0|\theta P(u)}_{\le 0} = 0$$ équivalent d'une énergie mécanique nulle

La zone de l'espace accessible à la particule correspond à celle vérifiant

$|\Gamma_0|\theta P(u) \ge 0 \Leftrightarrow P(u) \ge 0$

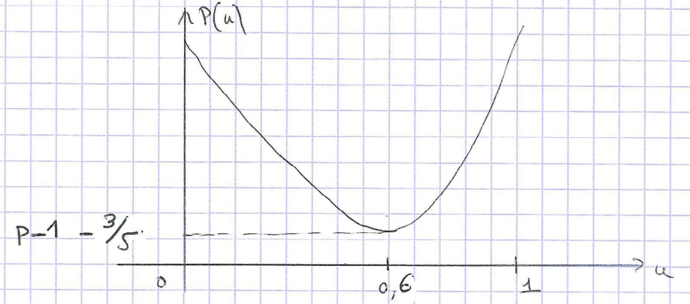
On peut ensuite étudier la fonction $u \to P(u)$ il s'agit d'une parabole qui admet un minimum en $u = +3/5$

Racines de $P(u)$: $\Delta = 4 - 4\cdot\frac{5}{3}(p-1)$

$\Delta = 4 - \frac{20}{3}p + \frac{20}{3} = \frac{32}{3} - \frac{20}{3}p$

racines : $\frac{2 \pm \sqrt{\Delta}}{10/3}$

Pour que le vent puisse arracher l'arbre il faut que $P(u)\theta \geq 0$ pour $0<\theta<\theta_c$.
On veut donc que $P(u) \geq 0$ pour $0<u<1$



On en déduit que l'arbre peut être déraciné si $p-1-3/5>0$

$\Leftrightarrow \boxed{p > 8/5}$

$p_c = 8/5$

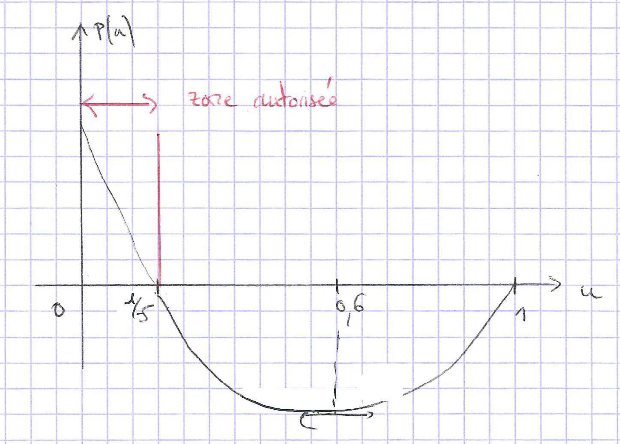
$$p_c = \frac{a C_x \rho_a v_c^2 H^2}{|\Gamma_0|} = \frac{8}{5} \Leftrightarrow \boxed{v_c = \sqrt{\frac{p_c |\Gamma_0|}{a C_x \rho_a H^2}}}$$

AN $$v_c = \left(\frac{1,6 \cdot 9}{0,5 \cdot 0,5 \cdot 20^2}\right)^{1/2}$$

$v_c = 13$ m/s

13) $p = \frac{4}{3} = 1,33 < 1,6 = p_c$. L'arbre ne peut pas être être déraciné.
Donc sur $0<u<1$ il existe une zone où $P(u)<0$. Le mouvement de l'arbre est donc borné.
Le mouvement de l'arbre est borné sur $0<u<v_c$ avec $P(v_c)=0$

$\Delta = \frac{16}{9}$ racines $\frac{2 \pm 4/3}{10/3} = \frac{6 \pm 4}{10}$ → $1/5$, → 1



Bornes du mouvement
u : → 1/5
θ : 0 → 2°

On s'attend à ce que l'arbre oscille entre 0 et 2°.

En réalité, l'arbre finit par atteindre une position θ_∞. Ceci peut s'expliquer par la présence d'un amortissement non pris en compte dans la modélisation.

13

<u>Vérification des cohérences résultats expérimentaux / modèle</u> : oubli q 11

- On trouve $\theta_m = \frac{2}{5}\theta_c = 4°$. Ceci est cohérent avec la lecture graphique du minimum $\theta = 4°$ e.

- Par le calcul, on trouve $\Gamma_m = \frac{9}{5}\Gamma_0 = -\frac{81}{5} = -16$ N.m

avec $\Gamma_0 = -9$ N.m (lecture graphique)

Graphiquement, on lit également -16 N.m, ce qui est cohérent.