

## Epreuve de fin d'année 2020

### Deuxième composition de physique Samedi 20 juin 2020 / 4h Classes de PCSI

- *L'utilisation de la calculatrice est autorisée.*
- *Aucun document n'est autorisé.*
- *Cette composition est constituée de deux problèmes **indépendants**.*
- *Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction dans la notation.  
En particulier, on prendra soin de bien donner des résultats littéraux exprimés en fonction des données du problème avant toute application numérique.*

## Problème 1 : Blindage par une feuille métallique lors d'une explosion nucléaire

Au moment de l'explosion d'une bombe nucléaire dans la haute atmosphère, les produits de la désintégration des noyaux d'uranium se trouvent dans un état excité. Ils se désexcitent en quelques nanosecondes en émettant des photons  $\gamma$  d'énergie supérieure à 1 MeV, qui vont fortement ioniser l'atmosphère en engendrant un courant électrique très intense. L'impulsion d'ondes électromagnétiques de durée courte, quelques dizaines de nanosecondes qui en résulte, peut détruire les dispositifs électriques même situés à grande distance du lieu de l'explosion.

Le problème de blindage, c'est-à-dire de la protection des appareils sensibles, est une question de survie. D'une manière générale, l'appareil à protéger est disposé à l'intérieur d'une enceinte métallique fermée qui empêche le champ électromagnétique extérieur de pénétrer. Un protocole expérimental très simple à mettre en œuvre (y compris dans une salle de travaux pratiques) est l'objet de ce problème.

Dans tout le sujet, on se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

### I. Etude de l'expérience A

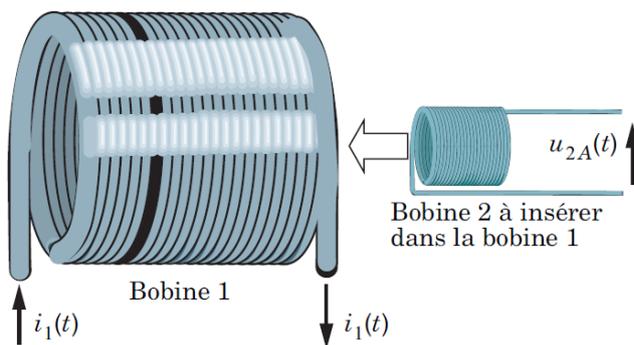


Figure 1 : Principe de l'expérience A

Dans une première expérience, dite expérience A, on place deux bobines cylindriques assez longues de telle sorte qu'elles aient le même axe de révolution. La bobine la plus grande n°1 de résistance  $R_1$  et d'autoinductance  $L_1$  est alimentée par un générateur de tension sinusoïdale de force électromotrice  $e_g(t) = e_m \cos(\omega t + \varphi_e)$  et de résistance interne  $R_g = 50,0 \Omega$ . La valeur efficace de la force électromotrice du générateur vaut  $e_{ff} = (7,3 \pm 0,1) V$  (l'incertitude donnée est élargie à 95%). Par ailleurs, un voltmètre dont on considère l'impédance infinie indique la tension efficace aux bornes de la petite bobine située à l'intérieur de l'autre bobine.

Le tableau de données ci-dessous consigne des valeurs numériques de  $U_{2A}$  lues sur le voltmètre (valeur efficace de la tension aux bornes de la bobine n°2) en fonction de la fréquence  $f$  imposée par le générateur.

| Fréquence $f$ (Hz) | 31.0    | 50.0    | 78.60  | 110    | 1000   | 2200   |
|--------------------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|
| $U_{2A}$ (V)       | 0.16101 | 0.24202 | 0.3230 | 0.3761 | 0.4782 | 0.4800 |

**1)** En utilisant la notice du constructeur du voltmètre donnée dans le document n°1 de l'annexe, indiquer l'incertitude de mesure élargie à 95% de la mesure de  $U_{2A}$  effectuée à la fréquence  $2,2 \text{ kHz}$ .

Présenter le résultat de la mesure sous une forme scientifique usuelle.

**2)** On considère le filtre de tension d'entrée  $e_g$  et de tension de sortie  $u_{2A}$ . Tracer le diagramme de Bode pour le gain de ce filtre sur le papier semi-logarithmique, document n°2 de l'annexe (on n'oubliera pas de joindre le diagramme dans sa copie et d'indiquer son nom sur le diagramme).

Déterminer la nature du filtre ainsi réalisé.

Démontrer que le diagramme de Bode est compatible avec un filtre du premier ordre.

Déterminer les valeurs numériques du gain  $|H_0|$  dans la bande passante et de la fréquence de coupure  $f_1$  à  $-3\text{dB}$ .

On souhaite modéliser l'expérience A et interpréter théoriquement les résultats obtenus expérimentalement.

Par un choix convenable de date origine, l'intensité du courant vaut  $i_1(t) = I_m \cos(\omega t)$  dans la bobine n°1.

**3)** Relier l'amplitude  $I_m$  de l'intensité de courant circulant dans cette bobine aux caractéristiques électriques du circuit. Exprimer de même la phase à l'origine  $\varphi_e$  de la force électromotrice du générateur  $e_g(t)$ .

On admet que dans la bobine n°1, on peut négliger les effets de bords, et que l'on peut supposer que le champ magnétique créé par la bobine n°1 est nul à l'extérieur de celle-ci et qu'il est uniforme à l'intérieur de celle-ci, dans la direction de l'axe (Oz) de la bobine et peut s'écrire  $B_z = \mu_0 n_1 i_1(t)$ , où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide et  $n_1$  le nombre de spires par unité de longueur dans la bobine n°1.

**4)** Indiquer soigneusement sur un dessin le sens du champ magnétique créé par la bobine n°1 si  $i_1(t) > 0$ . Mettre l'expression du champ magnétique sous la forme  $\underline{B_z} = \underline{f(\omega)} \times \underline{e_g}$  en amplitudes complexes. Exprimer la fonction  $\underline{f(\omega)}$  en fonction de  $R_g, R_1, L_1$  et  $n_1$ .

La bobine de détection n°2 de  $N_2$  spires circulaires de rayon  $r_2$  est reliée à un oscilloscope ou voltmètre de très grande impédance d'entrée aux fréquences considérées.

**5)** Exprimer en notation complexe la tension  $\underline{u_{2A}}$  aux bornes de la bobine de détection en fonction de  $\underline{B_z}$ . On précisera sur un schéma la convention électrocinétique d'orientation retenue.

**6)** En déduire l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H_A}$  du filtre de tension d'entrée  $e_g$  et de tension de sortie  $u_{2A}$ . Conclure quant à la qualité de la modélisation théorique.

Donner les expressions théoriques du gain  $H_0$  dans la bande passante et de la fréquence de coupure  $f_1$  à  $-3\text{dB}$ .

En utilisant les données expérimentales, déterminer la valeur numérique de l'inductance  $L_1$  de la bobine sachant que  $R_1 = 11,2 \Omega$ .

## II. Etude de l'expérience B

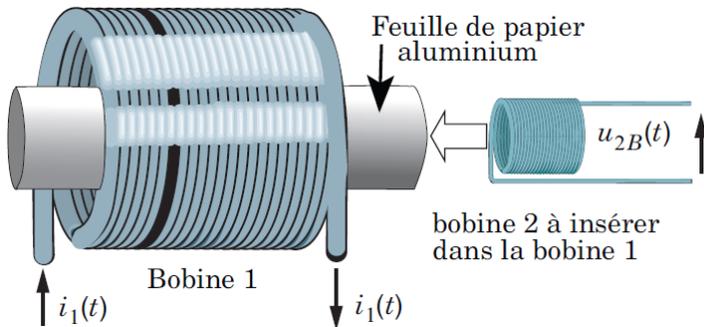


Figure 2 : Principe de l'expérience B

Le protocole expérimental de la seconde expérience est quasi identique à l'expérience A, à ceci près que l'on enveloppe la bobine de détection par plusieurs tours de papier aluminium ménager enroulé en forme de cylindre d'épaisseur totale  $h$  et de rayon  $r_1 \gg h$ . Ce cylindre métallique de même axe que les bobines est lui-même placé dans la bobine n°1.

En hautes fréquences, la fonction de transfert :  $\underline{H}_B = \underline{u}_{2B} / \underline{e}_g$  en présence de la feuille d'aluminium diffère notablement de l'expérience précédente. Une modélisation mathématique de la fonction  $\underline{H}_B$  s'accorde bien avec le modèle suivant :

$$\underline{H}_B = \frac{H_0'}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$

Sur la figure 3 est représenté le diagramme de Bode en gain associé à cette fonction de transfert  $\underline{H}_B$ .

7) Donner la nature et l'ordre du filtre théorique ainsi formé. Comparer la modélisation théorique de l'expérience B aux résultats expérimentaux de l'expérience A. Commenter.

8) A partir du diagramme de Bode théorique du filtre associé à l'expérience B (figure 3), déterminer les valeurs numériques des trois grandeurs caractéristiques du filtre  $H_0'$ ,  $Q$  et  $f_0$ .

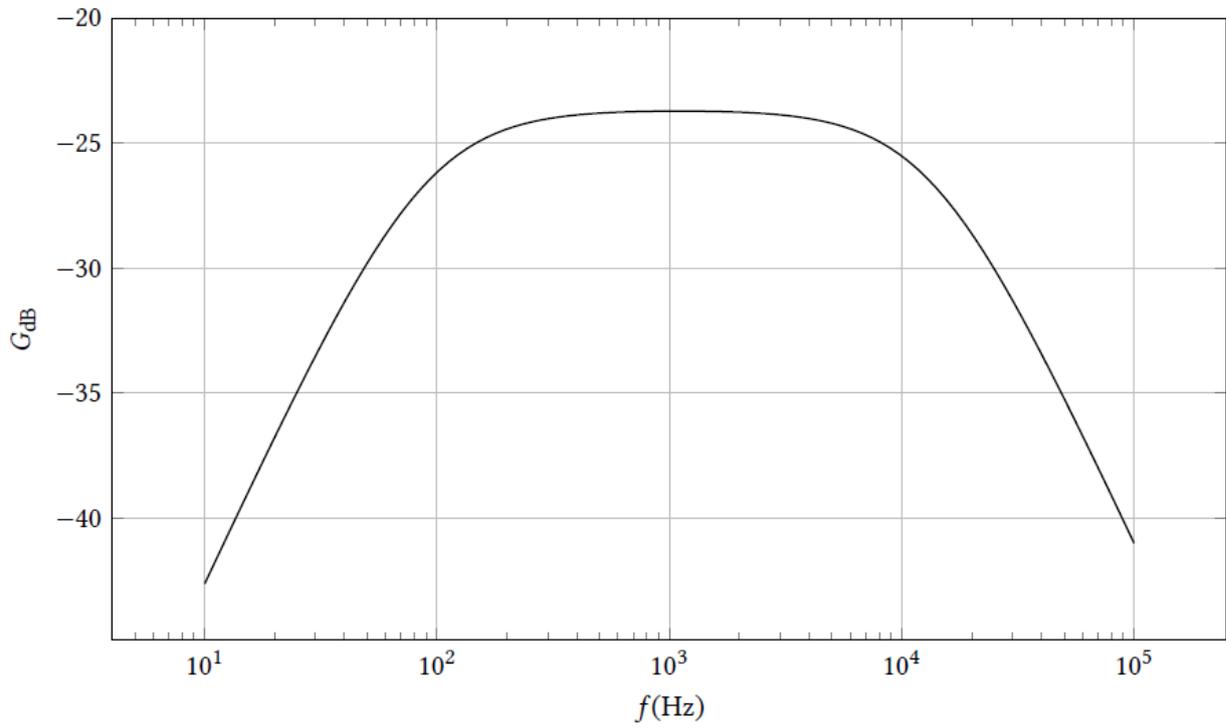
On cherche à mettre  $\underline{H}_B(f)$  sous la forme  $\underline{H}_B = \underline{H}_A \times \underline{H}$  avec  $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_2}}$ .

9) Au vu de la forme du diagramme de Bode de la figure 3, peut-on prévoir si  $f_2 > f_1$  ou  $f_2 < f_1$  ? On demande ici un raisonnement graphique. Aucun calcul n'est demandé dans cette question.

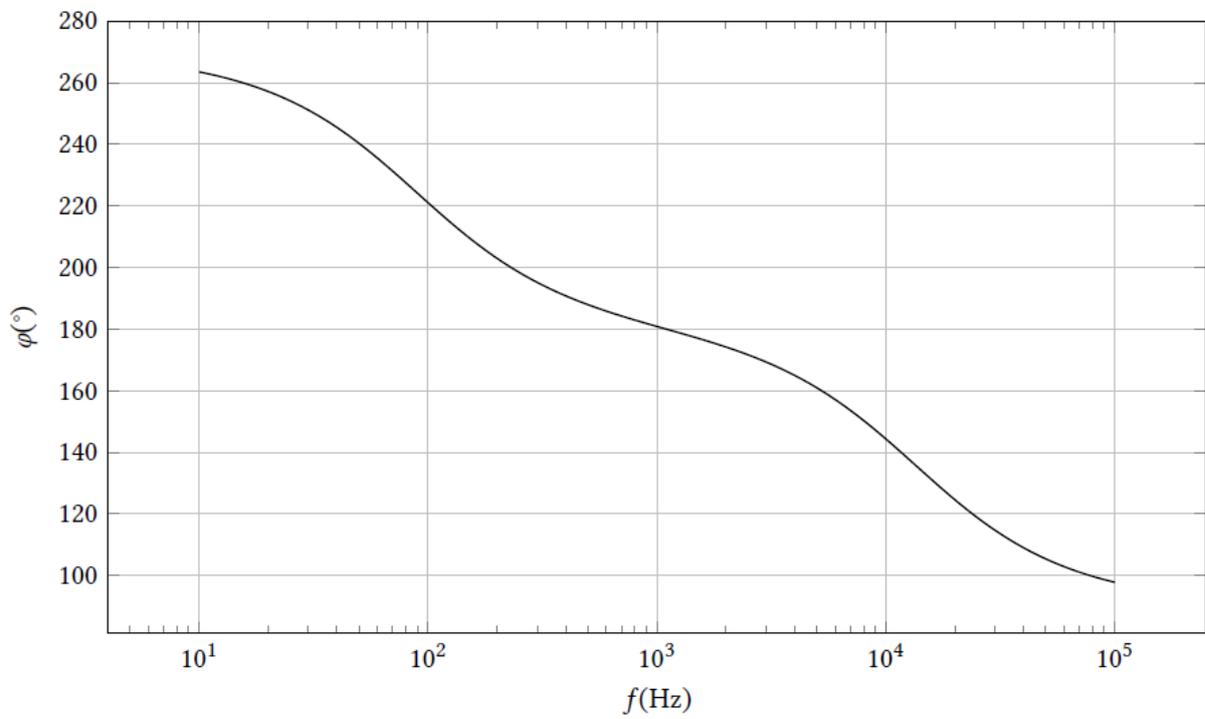
10) Exprimer  $H_0'$  en fonction de  $H_0$ ,  $f_1$  et  $f_2$ .

Exprimer également le facteur de qualité  $Q$  et la fréquence centrale  $f_0$  en fonction de  $f_1$  et  $f_2$ .

11) En utilisant les valeurs numériques théoriques obtenues à la question 8) de  $Q$  et  $f_0$ , déterminer les valeurs numériques de  $f_1$  et  $f_2$ . Commentaires



**Figure 3a)** Diagramme de Bode en gain du filtre théorique



**Figure 3b)** : Diagramme de Bode en phase du filtre théorique

### III. De la difficulté de blinder efficacement

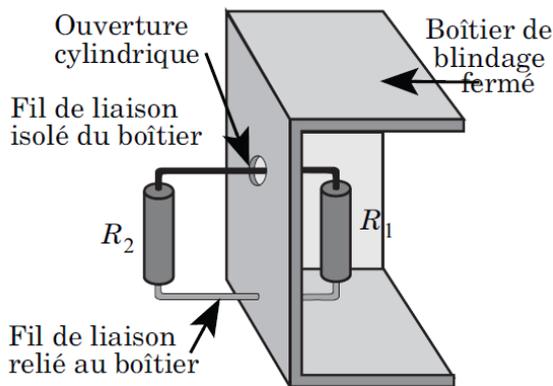


Figure 4 : Défauts du boîtier de blindage

La partie précédente a montré que le blindage était efficace si la cavité où se trouve le détecteur est fermée. Mais en pratique, l'appareil considéré dépend presque toujours de l'extérieur pour fonctionner et communiquer. On peut dire, par exemple, que le câble d'alimentation ou l'antenne sont autant de défauts à la cuirasse. Cette partie porte sur un mécanisme possible de transfert d'énergie électromagnétique à travers les ouvertures même petites du blindage.

Considérons la situation simple suivante. Deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  sont reliées par deux fils.  $R_1$  est placée dans un boîtier métallique fermé tandis que  $R_2$  est à l'extérieur. Un des fils de liaison, de rayon  $d_1$ , traverse le boîtier métallique à travers une ouverture cylindrique de rayon  $d_2$  pratiquée dans la paroi métallique. Les autres bornes des conducteurs ohmiques sont reliées directement au boîtier.

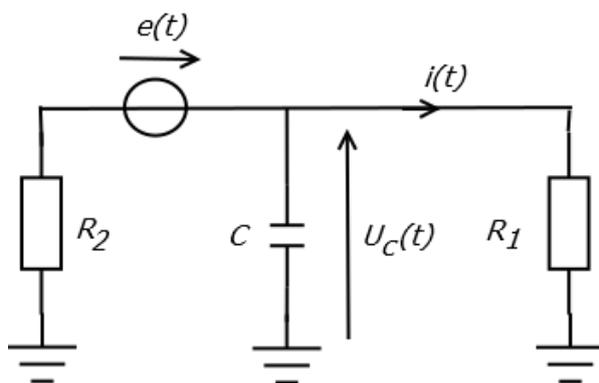


Figure 5 : Modèles électrocinétiques des défauts du blindage

Dans cette partie, on va aborder les faiblesses du blindage avec une étude électrocinétique.

L'impulsion électromagnétique entraîne une force électromotrice induite du type  $e(t)$  telle que  $e(t) = 0$  pour  $t < 0$  et pour  $t > T$  et  $e(t) = e_{max}$  si  $0 < t < T$ . Comme le fil isolé est proche de la paroi métallique, il existe un effet capacitif, que nous supposerons localisé au niveau du passage cylindrique à travers le boîtier de blindage. Le schéma de la figure 5 traduit un modèle électrocinétique de la situation considérée.

12) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur  $U_c(t)$ .

13) En déduire  $U_c(t)$  pour  $0 < t < T$ .

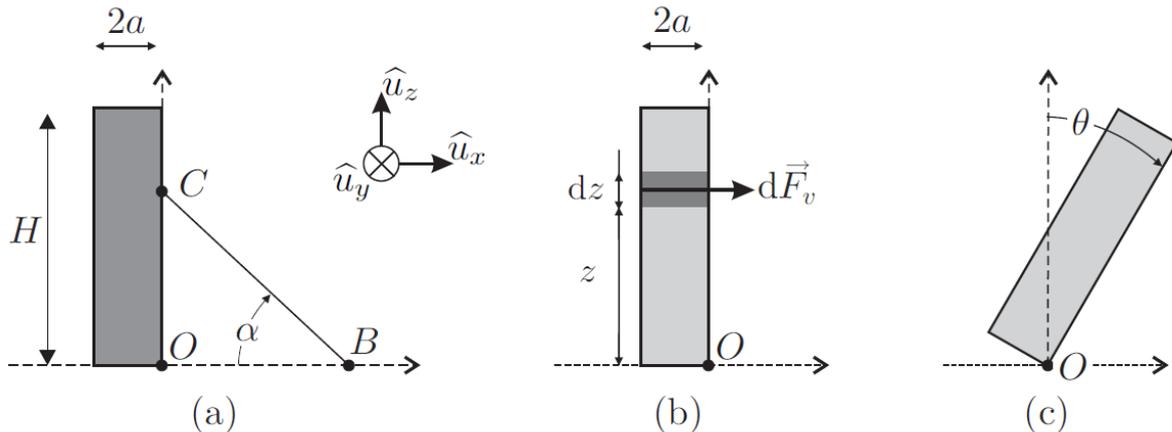
14) En déduire l'intensité du courant électrique  $i(t)$  dans la résistance  $R_1$ .

Cette modélisation électrocinétique montre que l'onde électromagnétique générée par l'explosion nucléaire peut pénétrer dans l'enceinte à protéger en dépit de la présence du blindage. Ceci est lié au fait que la cavité n'est pas totalement fermée.

## Problème 2 : Chute d'arbre

### I. Chute d'un arbre mort

Un bûcheron assimilé à un point matériel B de masse  $m$  souhaite abattre un arbre mort assimilé à un parallélépipède homogène de masse  $M$  avec  $M > m$ , de hauteur  $H$  et de section droite carrée de côté  $2a$  représenté sur la figure 1(a) ci-dessous.



**Figure 1** : Modélisation de la chute d'un arbre

Il tire pour cela sur un câble fixé en C à l'arbre, de longueur  $BC = l$  et de masse négligeable afin de faire tourner l'arbre autour de l'axe  $(Oy)$  dirigé par le vecteur  $\vec{u}_y$ .

L'arbre étant mort, on néglige l'action de ses racines, de telle sorte qu'au moment où l'arbre commence à tourner, les actions de contact qu'il subit se limitent à une force  $\vec{R}_1 = T_1 \vec{u}_x + N_1 \vec{u}_z$  appliquée au point O et satisfaisant aux lois de Coulomb avec un coefficient de frottement  $f$ .

De même les actions du sol sur le bûcheron sont décrites par une force  $\vec{R}_2 = T_2 \vec{u}_x + N_2 \vec{u}_z$  appliquée au point B et satisfaisant aux lois de Coulomb avec le même coefficient de frottement  $f$ .

Les composantes  $T_1, N_1, T_2$  et  $N_2$  sont des valeurs algébriques. Le câble est supposé tendu.

On note  $\vec{F}$  la force exercée par le câble sur l'arbre au point C, supposée parallèle au câble et  $F$  sa norme ( $F > 0$ ). Les angles sont orientés positivement dans le sens trigonométrique autour de l'axe (Oy) orienté par le vecteur  $\vec{u}_y$  et on note  $\alpha$  l'angle (positif) entre  $\vec{BO}$  et  $\vec{BC}$ , angle compris entre 0 et  $\pi/2$ .

**1)** Le bûcheron est supposé ne pas glisser dans la situation initiale décrite par la figure 1(a) et reste en contact avec le sol.

Exprimer  $N_2$  et  $T_2$  en fonction de  $F, \alpha, m$  et  $g$ .

En déduire l'expression de la valeur maximale  $F_{max}$  de  $F$ , pour que le bûcheron ne glisse pas, en fonction de  $f, m, g$  et  $\alpha$ .

**2)** L'arbre est supposé au repos dans la situation initiale décrite par la figure 1(a).

Exprimer  $N_1$  et  $T_1$  en fonction de  $F, M, g$  et  $\alpha$ .

En déduire que pour  $F < F_{max}$ , le glissement n'est pas possible en O.

**3)** Exprimer le moment  $\Gamma_g$  du poids de l'arbre par rapport à l'axe (Oy) dans la situation initiale décrite par la figure 1(a).

**4)** Soit  $\Gamma_B$  le moment par rapport à l'axe (Oy) exercé par le bûcheron sur l'arbre via le câble. Quelle est la valeur minimale  $\Gamma_{B \min}$  de  $\Gamma_B$  permettant à l'arbre de pivoter autour de l'axe (Oy) ?

**5)** Dans cette question, on suppose la force  $F$  constante et fixée par le bûcheron et l'angle  $\alpha$  variable. Justifier (avec ou sans calculs, mais rigoureusement) qu'il existe une valeur optimale  $\alpha_m$  de l'angle  $\alpha$  pour rendre le couple  $\Gamma_B$  maximal.

On suppose maintenant que, quel que soit l'angle  $\alpha$ , l'action du bûcheron est telle que l'on est à la limite du glissement : **F prend maintenant la valeur  $F_{max}$**  à tout moment.

**6)** Montrer que le moment  $\Gamma_B$  par rapport à l'axe (Oy) exercé par le bûcheron via le câble s'écrit :

$$\Gamma_B = \frac{mgl}{\varphi(\alpha)} \text{ avec } \varphi(\alpha) = \frac{1}{f \sin(\alpha)} + \frac{1}{\cos(\alpha)}.$$

Déterminer la nouvelle valeur optimale  $\alpha_0$  de l'angle  $\alpha$  rendant le moment  $\Gamma_B$  maximal en fonction du coefficient  $f$ . Donner sa valeur pour  $f = 1,0$ .

**7)** On donne  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ ,  $M = 1.10^3 \text{ kg}$ ,  $H = 20 \text{ m}$ ,  $\alpha = 0,5 \text{ m}$ ,  $m = 1.10^2 \text{ kg}$  et  $f = 1,0$ . Dans la condition optimale  $\alpha = \alpha_0$ , calculer la force  $F_{max}$  et la longueur de corde  $l$  nécessaire pour initier la rotation de l'arbre. Commenter.

On suppose que l'arbre a commencé sa rotation autour de l'axe (Oy) repérée par l'angle  $\theta$  que fait  $\overrightarrow{OC}$  avec  $(O, \overrightarrow{u}_z)$  (figure 1(c)).

**8)** Après avoir fait une figure représentant la situation et faisant apparaître les différents paramètres géométriques, exprimer l'énergie potentielle de pesanteur  $E_p$  de l'arbre en fonction de  $M, g, H, a$  et  $\theta$ . Le bûcheron opère de manière quasi-statique c'est-à-dire sans communiquer d'énergie cinétique à l'arbre. A partir de quel angle  $\theta_s$  peut-il lâcher le câble ? On pourra représenter la courbe représentative de la fonction  $E_p(\theta)$ .

## II. Chute d'un arbre vivant sous l'effet du vent

Dans cette partie, on s'intéresse à la chute d'un arbre vivant, de hauteur  $H$ , sous l'effet d'un coup de vent violent. **On néglige le rôle du poids de l'arbre** : son mouvement résulte uniquement d'une compétition entre l'action du sol via les racines et l'action du vent.

On décrit l'action d'un vent soufflant dans la direction  $\overrightarrow{u}_x$  avec une vitesse  $U$  sur une tranche d'arbre (supposé vertical à ce stade) comprise entre  $z$  et  $z + dz$  (figure 1(b)) par une force élémentaire de la forme  $d\overrightarrow{F}_v = 2aC_x\rho_a U^2 dz \overrightarrow{u}_x$ , où  $\rho_a$  est la masse volumique de l'air,  $C_x$  un coefficient aérodynamique et où l'on considère un arbre de section carrée de côté  $2a = 1,0 \text{ m}$ .

**9)** Proposer un ordre de grandeur de la vitesse  $U$  pour un vent violent. L'arbre étant vertical, exprimer le moment total  $\Gamma_v$  des actions du vent par rapport à l'axe (Oy) en fonction de  $C_x, \rho_a, a, H$  et  $U$ .

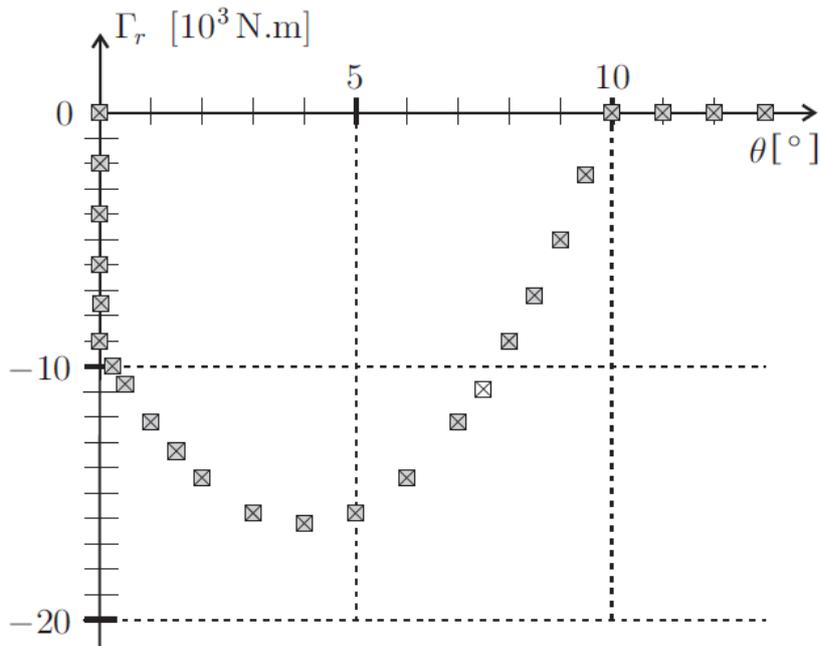
**10)** Lorsque l'arbre commence à pencher, on repère son mouvement par l'angle  $\theta$  représenté sur la figure 1(c). Le moment  $\Gamma_v$  varie en fonction de  $\theta$  et on constate que  $\Gamma_v$  est proportionnel à  $(\cos(\theta))^n$  avec  $n$  entier. Proposer une valeur de l'entier  $n$  en justifiant votre réponse.

Dans toute la suite, on omet la dépendance de  $\Gamma_v$  en  $\theta$  car celui-ci reste inférieur  $10^\circ$ .

L'action du sol sur l'arbre est décrite par un moment résistant  $\Gamma_r$  par rapport à l'axe (Oy), qui met en jeu des phénomènes complexes comme l'élasticité des racines, un déracinement partiel, l'entraînement de la terre, etc. Des essais de traction via un câble ont permis de relever les variations de  $\Gamma_r$  (en  $10^3 \text{ N.m}$ ) en fonction de  $\theta$  (en degrés) sur la figure 2 dans le domaine  $\theta > 0$  auquel on se limite. Cette figure fait notamment apparaître une variation brutale au voisinage de  $\theta = 0$  que l'on modélise par une discontinuité telle  $\Gamma_r(0^-) = 0$  et  $\Gamma_r(0^+) = \Gamma_0$  avec  $\Gamma_0 < 0$ . Par ailleurs, au-delà d'un certain angle  $\theta_c$ , l'arbre est totalement déraciné, de telle sorte que  $\Gamma_r = 0$ .

Dans le domaine  $0 < \theta \leq \theta_c$ , on modélise les mesures expérimentales de  $\Gamma_r$  par un polynôme du deuxième degré de la forme :

$$\Gamma_r = \Gamma_0 \left( \beta + 4 \frac{\theta}{\theta_c} - 5 \frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right) \text{ avec } \Gamma_0 < 0. \quad (1)$$



**Figure 2 :** Mesures du moment résistant. La taille des carrés représente l'incertitude de mesure.

**11)** Quelles valeurs doit-on donner aux paramètres  $\theta_c$  et  $\beta$  afin qu'ils rendent compte des mesures de la figure 2.

Exprimer l'angle  $\theta_m$  pour lequel  $\Gamma_r$  atteint sa valeur minimale et la valeur  $\Gamma_m$  de ce minimum.

Vérifier la cohérence entre les résultats expérimentaux et les valeurs de  $\theta_m/\theta_c$  et  $\Gamma_m/\Gamma_0$  issues de ce modèle.

Du point de vue de sa dynamique, l'arbre est désormais assimilé à un arbre mince en rotation autour de l'axe (Oy) avec un moment d'inertie  $J$ , soumis au moment constant  $\Gamma_v$  et au moment  $\Gamma_r(\theta)$  décrit par le modèle de l'équation (1). Initialement, l'arbre est au repos en  $\theta = 0$  en présence d'un vent de vitesse  $U$  indépendante du temps et on s'interroge sur son évolution.

On définit le paramètre  $p = -\Gamma_v / \Gamma_0$ .

**12)** Discuter *graphiquement*, selon la valeur du paramètre  $p$ , la possibilité pour l'arbre de rester en équilibre en  $\theta = 0$ . Cet équilibre est-il stable ? De même, discuter graphiquement selon la valeur de  $p$  l'existence et la stabilité de positions d'équilibre en  $\theta_e \neq 0$ .

Dans le cas où il existe une position d'équilibre stable inférieure à  $\theta_c$ , expliquer sans calculs pourquoi on ne peut pas néanmoins pas être certain que l'arbre résiste au vent.

On se propose de trancher cette question. Les conditions initiales restent  $\theta = 0$  et  $(\dot{\theta} = 0)$ .

**13)** Montrer que la vitesse angulaire de l'arbre se met sous la forme  $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = -\Gamma_0 \theta P(u)$ , où  $P(u)$  est un trinôme du second degré pour la variable réduite  $u = \theta / \theta_c$  que l'on explicitera en fonction de l'unique paramètre  $p$ . En déduire, en précisant soigneusement le raisonnement adapté ( $-\Gamma_0 > 0$ ), la valeur minimale  $p_c$  de  $p$  permettant au vent de déraciner l'arbre.

Calculer la vitesse minimale  $U_c$  du vent permettant de déraciner l'arbre correspondant au graphe de la figure 2, sachant que  $H = 20 \text{ m}$  et  $a = 0,5 \text{ m}$ . On prendra  $C_x = 0,5$ .

On se place désormais dans le cas  $p = 4/3$ .

**14) Déterminer les bornes du mouvement de l'arbre.**

En réalité l'arbre finit par atteindre une position  $\theta_\infty$ , où il reste immobile. Interpréter qualitativement ce résultat.

## FORMULAIRE

**Lois de Coulomb :** un solide en contact quasi-ponctuel sur un support subit de la part du support des actions de contact équivalents à une force  $\vec{F}$  que l'on peut décomposer en une composante normale  $\vec{N}$  et une composante tangentielle  $\vec{T}$ .

En l'absence de glissement, on a  $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$  où  $f$  est le coefficient de frottement.

En présence de glissement, la composante tangentielle  $\vec{T}$  est dirigée dans la direction opposée à celle du vecteur-vitesse de glissement et on a  $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$ .

## ANNEXE

**Document n°1 : extrait de la notice constructeur du voltmètre utilisé dans l'expérience A**

### AC specifications for U1271A

| Function                         | Range   | Resolution | Accuracy $\pm$ (% of reading + counts of least significant digit) |                |  |                 |
|----------------------------------|---|------------|---|----------------|--|-----------------|
|                                  |   |            | 45 Hz to 65 Hz  | 30 Hz to 1 kHz | 1 kHz to 5 kHz                             | 5 kHz to 20 kHz |
| True RMS AC Voltage <sup>1</sup> | 300 mV  | 0.01 mV    | 0.7 + 20  | 1.0 + 25       | 2.0 + 25                                   | 2.0 + 40        |
|                                  | 3 V   | 0.0001 V   | 0.7 + 20  | 1.0 + 25       | 2.0 + 25                                   | 2.0 + 40        |
|                                  | 30 V  | 0.001 V    | 0.7 + 20  | 1.0 + 25       | 2.0 + 25                                   | 2.0 + 40        |
|                                  | 300 V   | 0.01 V     | 0.7 + 20  | 1.0 + 25       | 2.0 + 25                                   | –               |
|                                  | 1000 V  | 0.1 V      | 0.7 + 20  | 1.0 + 25       | –  | –               |
|                                  | LPF (low pass filter) enabled, applicable for all voltage ranges and resolution |            |   | 0.7 + 20       | 1.0 + 25 @ < 200 Hz<br>5.0 + 25 @ < 440 Hz | –               |



