



Lycée Privé Sainte-Geneviève

Épreuve de classement de fin d'année 2021



Première composition de physique – Lundi 14 juin 2021 – 4 heures
Sujet PCSI



La restitution d'un son Éléments de correction

Première partie : modélisation d'un haut-parleur

1. On considère dans un gaz parfait que les particules qui constituent le gaz (atomes ou molécules) sont ponctuelles et n'ont pas d'interaction entre elles. Le fluide est au repos et la répartition des vitesses des particules gaz est isotrope.

2.a. La loi des gaz parfaits a été formulée dans la seconde moitié du XVII^{ème} siècle.

2.b. La principale limite du modèle du gaz parfait vient du fait qu'à fortes pressions il n'est plus possible, compte-tenu de la densité des particules de gaz, de négliger le volume qu'elles occupent et les interactions entre elles. En général, on évite d'utiliser cette loi pour une pression supérieure à 10 bars.

3. La transformation est une transformation quasi-statique et mécaniquement réversible d'un gaz parfait, donc les lois de Laplace s'appliquent. On a donc $\overline{pV^\gamma} = p_0 V_0^\gamma$.

Nota : Bien sûr, si l'on écrit : « la transformation est une transformation réversible d'un gaz parfait, donc les lois de Laplace s'appliquent », la réponse est juste de la même façon.

4. On se place dans le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen. On réalise un bilan des actions mécaniques sur l'équipage mobile qui coulisse dans le cylindre. Celui-ci est soumis à :

- son poids (vertical) et une action de réaction verticale qui se compensent, le mouvement étant horizontal
- deux forces pressantes à gauche et à droite dont la résultante s'écrit $\vec{F} = (p - p_0)S\vec{u}_x$

Les transformations étant réversibles, les frottements sont négligés.

La seconde loi de Newton appliquée à l'équipage mobile s'écrit :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{u}_x = \vec{F}$$

Utilisons le résultat de la question 3 pour linéariser l'expression de la force \vec{F} .

On a $p = p_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma$, avec $V_0 = Sa$ et $V = S(a+x)$ donc $p = p_0 \left(\frac{a}{a+x}\right)^\gamma$.

On peut donc écrire $p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma x}{a} + o\left(\frac{x}{a}\right)\right)$, et à l'ordre 1 en $\frac{x}{a}$, $p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma x}{a}\right)$.

Finalement $\vec{F} = -\frac{p_0 \gamma x}{a} \vec{u}_x$ et la projection de la deuxième loi de Newton sur l'axe (Ox) donne :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{p_0 \gamma}{ma} x = 0$$

Ceci s'écrit encore :

$$\ddot{x} + \frac{p_0 \gamma S^2}{m V_0} x = 0$$

On a donc l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{p_0 \gamma S^2}{m V_0}}$. Numériquement, il reste : $\omega_0 = \sqrt{70} \cdot 10^2$ donc $\omega_0 \approx 8,37 \cdot 10^2 \text{ rad.s}^{-1}$.

5.a. On reprend le bilan des forces précédent, auquel s'ajoutent deux forces supplémentaires :

- $\vec{f} = -2m\lambda\omega_0 \vec{v}$
- $\vec{f}_{exc} = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$

La deuxième loi de Newton en projection sur l'axe (Ox) s'écrit désormais :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t)$$

Le second membre étant sinusoïdal, on est en régime sinusoïdal forcé et la notation complexe permet d'obtenir facilement l'expression analytique du régime établi :

$$-\omega^2 \underline{X}_0 + 2j\lambda\omega\omega_0 \underline{X}_0 + \omega_0^2 \underline{X}_0 = \frac{F_0}{m}$$

$$\frac{\underline{X}_0 m \omega_0^2}{F_0} = \frac{1}{1 + \frac{2j\lambda\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

La réponse en élancement à la force d'excitation présente donc un comportement de filtrage passe-bas.

On peut donc facilement trouver ω_0 : il s'agit de la pulsation pour laquelle $\phi = -90^\circ$ (la fonction de transfert qui précède est un nombre imaginaire pur). On obtient graphiquement $\omega_0 \approx 8,5 \cdot 10^2 \text{ rad.s}^{-1}$. La principale source d'incertitude provient du repérage de la graduation sur l'axe des abscisses. On peut évaluer le résultat à

$$\omega_0 \approx (8,5 \pm 0,3) \cdot 10^2 \text{ rad.s}^{-1}$$

Pour déterminer λ , la méthode la plus efficace, vue en travaux pratiques en PCSI, consiste à évaluer le gain de la fonction de transfert en ω_0 . Celui-ci vaut, en décibels, $20 \log\left(\frac{1}{2\lambda}\right)$.

Graphiquement, on repère donc $20 \log\left(\frac{1}{2\lambda}\right) \approx -0,8$. Donc $\log\left(\frac{1}{2\lambda}\right) = -0,04$ et $\frac{1}{2\lambda} \approx 0,912$. Donc $\lambda \approx \frac{1}{1,8} \approx 0,6$.

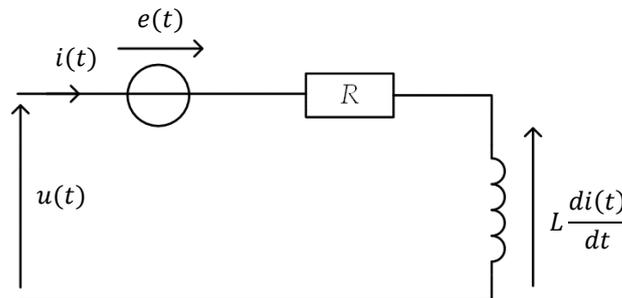
On peut considérer que la mesure du gain peut donner une valeur entre $-0,7$ et $-0,9$, ce qui modifie légèrement la valeur obtenue pour λ : finalement $\lambda \approx 0,6 \pm 0,05$.

Le spectre audible s'étend de 20 Hz à 20 kHz environ, c'est-à-dire $1,3 \cdot 10^2$ à $1,3 \cdot 10^5$ rad.s⁻¹. Ce haut-parleur atténue mécaniquement les composantes au-delà de 10^3 rad.s⁻¹; il ne restitue donc pas convenablement le spectre audible.

5.b.

```
def recherche_zero(omega, phase):
    g=0 # borne gauche de l'intervalle courant
    d=len(omega) # borne droite de l'intervalle courant
    while d-g>1:
        m=(d+g)//2 # l'indice médian doit être entier
        if phase[m]>-90:
            g=m # la phase est décroissante
        else:
            d=m
    return omega[g]
```

6. Pour établir le schéma équivalent, on utilise la loi de Faraday en convention générateur. Deux termes électromoteurs interviennent dans le circuit : $e(t)$ dû au flux extérieur et $-L \frac{di(t)}{dt}$ dû au flux propre.



7.a. La conservation de la puissance lors de la conversion électromécanique qui s'opère par induction s'écrit, avec $e(t)$ et $i(t)$ définies en convention générateur :

$$\boxed{e(t)i(t) + F(t)v(t) = 0}$$

7.b. On écrit la loi des mailles dans le circuit qui précède : $u(t) = -e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$, c'est-à-dire :

$$u(t) = \alpha B v(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

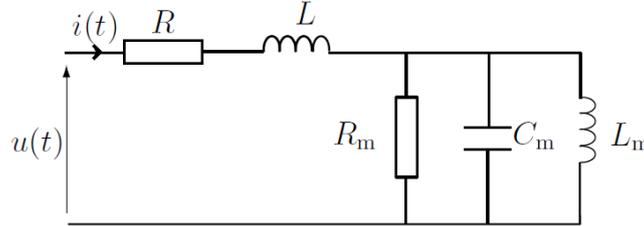
Ceci s'écrit en régime sinusoïdal forcé : $\boxed{\underline{u} = \alpha B \underline{v} + (R + jL\omega)\underline{i}}$

En régime sinusoïdal forcé, on peut écrire comme à la question 5 : $j\omega \underline{v} + 2\lambda\omega_0 \underline{v} + \frac{\omega_0^2 \underline{v}}{j\omega} = \frac{F}{m}$. D'après la question

7.a., $\underline{F} = \alpha B \underline{i}$, donc $\boxed{j\omega \underline{v} + 2\lambda\omega_0 \underline{v} + \frac{\omega_0^2 \underline{v}}{j\omega} = \frac{\alpha B \underline{i}}{m}}$.

En combinant l'équation électrique et l'équation mécanique encadrées précédemment, il reste :

$$\underline{u} = (R + jL\omega)\underline{i} + \frac{(\alpha B)^2}{m} \frac{i}{\left(j\omega + 2\lambda\omega_0 + \frac{\omega_0^2}{j\omega}\right)}$$



L'équation électrique obtenue se traduit par le schéma attendu, avec $C_{cin} = \frac{m}{\alpha^2 B^2}$, $R_{cin} = \frac{B^2 \alpha^2}{2m\lambda\omega_0}$ et $L_{cin} = \frac{B^2 \alpha^2}{m\omega_0^2}$.

8. Pour $\omega \rightarrow 0$, $Z \rightarrow R$. Les courbes sont cohérentes avec la modélisation car pour $\omega \rightarrow 0$, la partie imaginaire de l'impédance est nulle.

NB (non demandé) : On remarque par ailleurs que $R = 6,0 \Omega$, ce qui est un ordre de grandeur usuel pour un haut-parleur.

Pour $\omega \rightarrow \infty$, le terme d'impédance motionnelle tend vers 0 et l'impédance totale est équivalente à $R + jL\omega$: la courbe de la partie réelle est cohérente avec cette observation, car elle tend vers la même valeur que pour $\omega = 0$. Il est plus difficile de conclure pour la partie imaginaire, qui, pour les valeurs représentées, n'a pas encore rejoint son asymptote ; on devine cependant une allure linéaire de la courbe au-delà de $1,3 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$.

L'impédance motionnelle est purement réelle pour $\omega = \omega_0$: on trouve bien que pour cette pulsation $X_T = 0$, ce qui valide encore le modèle. Par ailleurs, à cette pulsation propre, la partie réelle de l'impédance motionnelle, donc de l'impédance totale, est maximale, ce qui correspond bien à ce qu'on observe sur le graphe correspondant.

9. Les deux ondes sont de même fréquence, on observe donc des interférences. Selon l'abscisse à laquelle on se place, celles-ci sont constructives ou destructives. Ainsi, on observe des minima et des maxima d'amplitude lorsque l'on déplace le microphone le long de l'axe ($x'x$).

10.a. S'agissant d'ondes progressives se propageant respectivement vers la gauche et vers la droite, on a :

$$\pi_1(x, t) = \pi_0 \cos\left(2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \text{ et } \pi_2(x, t) = \pi_0 \cos\left(2\pi f\left(t - \frac{d-x}{c}\right)\right).$$

10.b. Au point I, milieu de $[A_1A_2]$, le retard par rapport à l'émission est, pour chacune des deux ondes qui s'ajoutent en ce point, égal à $\frac{d}{2c}$ donc on a :

$$\pi\left(\frac{d}{2}, t\right) = 2\pi_0 \cos\left(2\pi f\left(t - \frac{d}{2c}\right)\right)$$

11.a. Il suffit d'ajouter les deux termes de la question 10.a.

On a donc :

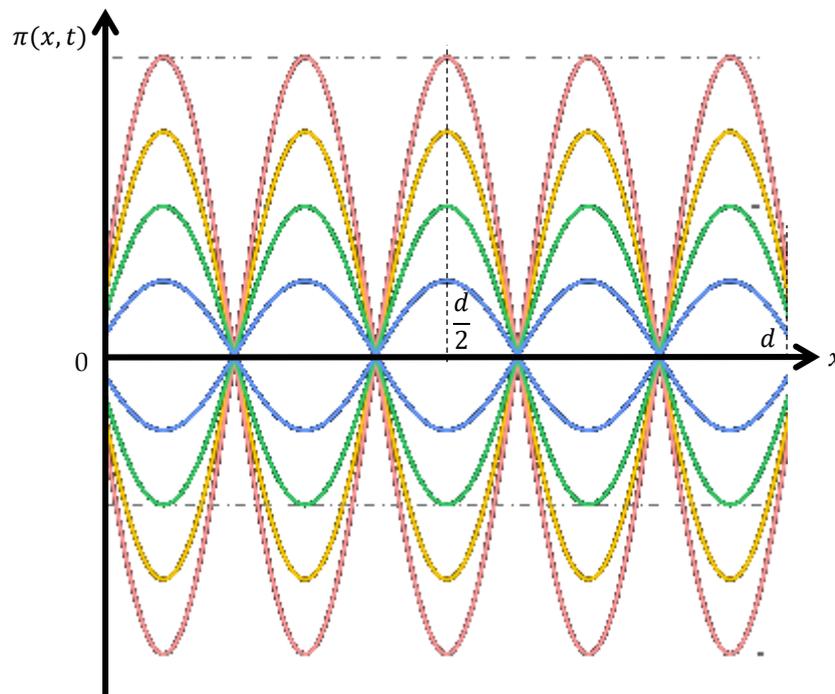
$$\pi(x, t) = \pi_0 \left[\cos\left(2\pi f \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) + \cos\left(2\pi f \left(t - \frac{d-x}{c}\right)\right) \right]$$

On utilise la formule trigonométrique permettant de transformer la somme en produit ; il reste

$$\pi(x, t) = 2\pi_0 \cos\left(2\pi f \left(t - \frac{d}{2c}\right)\right) \cos\left(2\pi f \frac{d-2x}{2c}\right)$$

On obtient bien l'expression d'une onde stationnaire.

11.b. Représenter $\pi(x, t)$ pour trois valeurs de t différentes pour x variant de 0 à d .



11.c. En notant p un entier relatif, les points de surpression nulle vérifient l'équation : $2\pi f \frac{d-2x}{2c} = p\pi + \frac{\pi}{2}$. Cela correspond donc aux abscisses $x = \frac{d}{2} - \frac{(p+\frac{1}{2})c}{2f}$. L'écart Δx entre deux points de surpression nulle vaut donc $\Delta x = \frac{c}{2f}$. On en déduit $c = 2f\Delta x$.

Numériquement on a donc $c = 2 \times 2,5 \times 6,9 \times 10^{3-2} = 345 \text{ m.s}^{-1}$. L'incertitude relative sur la mesure de distance est de l'ordre de 1,5 %, celle sur la fréquence est inférieure à 0,1 % ; dans le résultat final on garde donc une incertitude de l'ordre de 1,5 % et on néglige celle sur la fréquence.

Il reste donc : $c = 345 \pm 5 \text{ m.s}^{-1}$. L'ordre de grandeur pour la vitesse du son dans l'air est très satisfaisant.

Deuxième partie : alimentation électrique du haut-parleur

On considère un générateur électrique modélisé par la représentation de Thévenin, c'est-à-dire par une source idéale de tension E en série avec une résistance r . Ce générateur alimente une charge représentée par une résistance R . Dans la question 12, E est une tension constante.

12.a. r étant fixée, quelle doit être la valeur de R pour que la puissance électrique transmise à la charge soit maximale ? La démonstration est attendue.

La puissance transmise à la charge s'écrit $\mathcal{P}_u = RI^2$ c'est-à-dire $\mathcal{P}_u = \frac{RE^2}{(R+r)^2}$.

On cherche le maximum de \mathcal{P}_u lorsque R varie, r étant fixée. On a $\frac{d\mathcal{P}_u}{dR} = E^2 \left[\frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4} \right]$; celle-ci s'annule pour $R + r = 2R$, c'est-à-dire pour $r = R$.

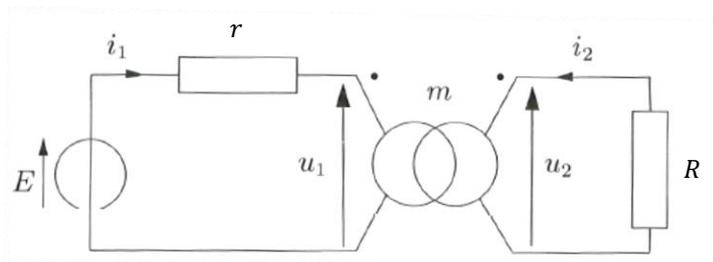
$\mathcal{P}_u \geq 0$ pour $R \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P}_u = 0$ pour $R = 0$ et $\lim_{R \rightarrow \infty} (\mathcal{P}_u) = 0$, donc l'extremum étant unique, il s'agit d'un maximum.

La puissance transmise à la charge est donc maximale pour $R = r$.

12.b. Pour calculer la puissance reçue par la charge, il suffit de réaliser l'application numérique de la formule établie à la question précédente : $\mathcal{P}_u = \frac{RE^2}{(R+r)^2}$.

On trouve environ : $\mathcal{P}_u = 8$ W pour $R = 2,0$ Ω , $\mathcal{P}_u = 13$ W pour $R = 8,0$ Ω et $\mathcal{P}_u = 6$ W pour $R = 50$ Ω . Si les impédances ne sont pas adaptées, la puissance transmise est beaucoup moins importante que si les impédances sont adaptées (de l'ordre de 50% pour les valeurs ici choisies par l'énoncé). La restitution sonore, dans le cas d'un haut-parleur, sera donc nettement dégradée.

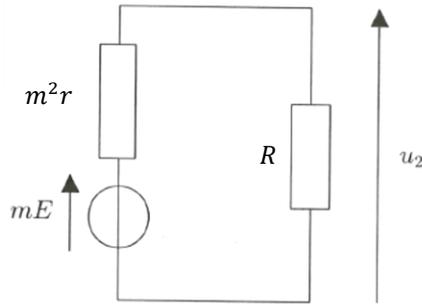
13. Étudions le montage ci-dessous, on appelle *primaire* l'enroulement à gauche sur le schéma et *secondaire* l'enroulement à droite.



Le transformateur est parfait : $u_2 = mu_1$ et $i_1 = -mi_2$.

Au primaire, $u_1 = E - ri_1 = E + mRi_2$ donc $u_2 = mE + m^2ri_2$: le dipôle équivalent à la source et à la résistance R_1 vus du secondaire et un générateur de force électromotrice mE et de résistance interne m^2r .

Vu du secondaire, le montage est donc équivalent à :



D'après ce qu'on a vu à la question précédente, l'adaptation d'impédance est réalisée lorsque $m^2r = R$. Ceci est réalisé par le choix du rapport de transformation $m = \sqrt{\frac{R}{r}}$. Numériquement on a donc $m = \sqrt{\frac{8}{50}}$, donc $m = \sqrt{0,16}$. Ainsi $m = 0,40$.

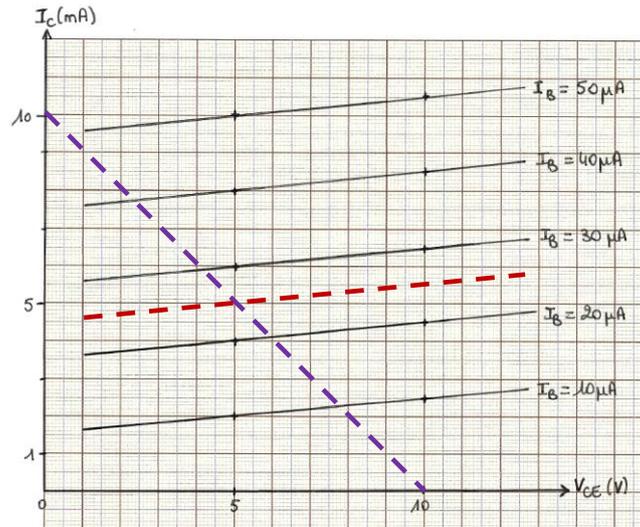
14.a. La loi des nœuds donne simplement : $I_E = I_B + I_C$.

14.b. On peut prendre par exemple sur ce réseau de droites celle correspondant à $I_B = 50 \mu\text{A}$. On a alors I_C de l'ordre de grandeur de 10 mA ; il existe donc environ un facteur 200 entre ces deux grandeurs. On obtient le même ordre de grandeur en raisonnant sur les autres droites de la figure. Donc $I_B \ll I_C$ et $I_E \approx I_C$.

14.c. La loi des mailles dans la maille de droite donne : $V_0 = V_{CE} + R_C I_C + R_E I_E$. Or $I_E \approx I_C$, donc il reste :

$$I_C = \frac{V_0 - V_{CE}}{R_C + R_E}$$

14.d. On a $R_C + R_E = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $V_0 = 10 \text{ V}$, ce qui correspond au tracé suivant : pour $V_{CE} = 0$, on a $I_C = 10 \text{ mA}$ et pour $I_C = 0$ on a $V_{CE} = V_0 = 10 \text{ V}$.



15. Il suffit de reprendre l'expression de la question précédente, on a donc : $I_C = 5,0 \text{ mA}$.

16. Sur la figure précédente on réalise une interpolation : on trace la droite parallèle aux autres droites passant par le point de coordonnées $(I_C = 5,0 \text{ mA}, V_{CE} = 5,0 \text{ V})$. Cette droite correspond à $I_B = 25 \mu\text{A}$ le faisceau de droites est linéaire en le paramètre I_B .

On reporte alors sur la figure 8 et on obtient $V_{BE} \approx 705 \text{ mV}$.

Le point bas du circuit constitue la référence des potentiels pour le générateur, on peut donc considérer qu'il s'agit de la masse. Ainsi $V_B = V_{BE} + R_E I_C$ et $V_B = 3,2 \text{ V}$.

17. L'intensité dans R_2 est égale à $I_B + I_1 = 11 I_B$. L'intensité dans R_1 est égale à $10 I_B$. De plus la valeur de I_B est imposée et le potentiel V_B l'est également.

Donc on doit choisir : $R_1 = \frac{V_B}{10I_B}$ c'est-à-dire numériquement : $R_1 = \frac{3,2}{2,5 \cdot 10^{-4}} = 13 \text{ k}\Omega$.

Et on a $R_2 = \frac{V_0 - V_B}{11I_B}$ c'est-à-dire numériquement $R_2 = \frac{6,8}{2,75 \cdot 10^{-4}} = 25 \text{ k}\Omega$.

On choisit finalement $R_1 = 13 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 25 \text{ k}\Omega$.

2.2.2. Amplification d'un signal autour du point de fonctionnement précédent

On désire maintenant étudier comment se comporte ce composant vis-à-vis de très petites variations autour du point de fonctionnement continu (statique) défini numériquement aux questions 15 à 17. Pour cela on écrira les différentes grandeurs électriques sous la forme : $V(t) = V^* + \tilde{v}(t)$, où V^* est une valeur indépendante du temps (composante continue) et $\tilde{v}(t)$ une grandeur dépendant du temps (grandeur dynamique). On supposera toujours $|V^*| \gg |\tilde{v}(t)|$.

Ainsi, les grandeurs calculées dans les questions 15 à 17 sont très peu modifiées par les grandeurs dynamiques.

On posera donc :

$$V_{CE}(t) = V_{CE}^* + \tilde{v}_{CE}(t)$$

$$V_{BE}(t) = V_{BE}^* + \tilde{v}_{BE}(t)$$

$$I_C(t) = I_C^* + \tilde{i}_C(t)$$

$$I_B(t) = I_B^* + \tilde{i}_B(t)$$

18. La caractéristique de la figure 7 est une droite : elle s'écrit donc $V_{BE} = A + rI_B$, avec $A \in \mathbb{R}$ et r la pente de la droite représentée. On remplace par les expressions ci-dessus : $V_{BE}^* + \tilde{v}_{BE}(t) = A + r(I_B^* + \tilde{i}_B(t))$. Les seuls termes dépendant du temps de chaque côté de l'égalité sont égaux à tout instant, donc $\tilde{v}_{BE}(t) = r\tilde{i}_B(t)$.

r est la pente de la droite représentée, c'est-à-dire : $r = \frac{(728-688).10^{-3}}{40.10^{-6}}$. Donc $r = 1,0 \text{ k}\Omega$.

Le faisceau de droites de la figure 8 correspond à $I_C = \alpha + \beta I_B + \gamma V_{CE}$, avec α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$. β est la pente de la droite représentant I_C en fonction de I_B à V_{CE} fixée. Par exemple, en se plaçant à $V_{CE} = 5,0 \text{ V}$, on obtient le tableau de valeurs suivant :

I_B (mA)	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050
I_C (mA)	2,0	4,0	6,0	8,0	10

Ainsi $\beta = 200$.

On a donc : $I_C + \tilde{i}_C(t) = \alpha + \beta[I_B^* + \tilde{i}_B(t)] + \gamma[V_{CE}^* + \tilde{v}_{CE}(t)]$.

En identifiant les termes dépendant du temps il reste : $\tilde{i}_C = \beta\tilde{i}_B + \gamma\tilde{v}_{CE}$.

Il suffit de déterminer γ et d'écrire $\rho = \frac{1}{\gamma}$.

γ est la pente des droites de la figure 8 : on obtient numériquement $\gamma = \frac{0,5.10^{-3}}{5} \text{ A.V}^{-1}$. Donc $\rho = 10 \text{ k}\Omega$.

19. Il suffit d'écrire les équations du schéma électrique proposé figure 10 et d'identifier aux équations de la question 18. On a : $\tilde{v}_{BE} = R_x \tilde{i}_B$ donc $R_x = r$.

De plus on a la loi des nœuds : $\tilde{i}_C = I_0 + \frac{\tilde{v}_{CE}}{R_y}$. On identifie là encore : $I_0 = \beta\tilde{i}_B$ et $R_y = \rho$. On peut donc remplacer en régime dynamique le transistor par le schéma équivalent de la figure 10.

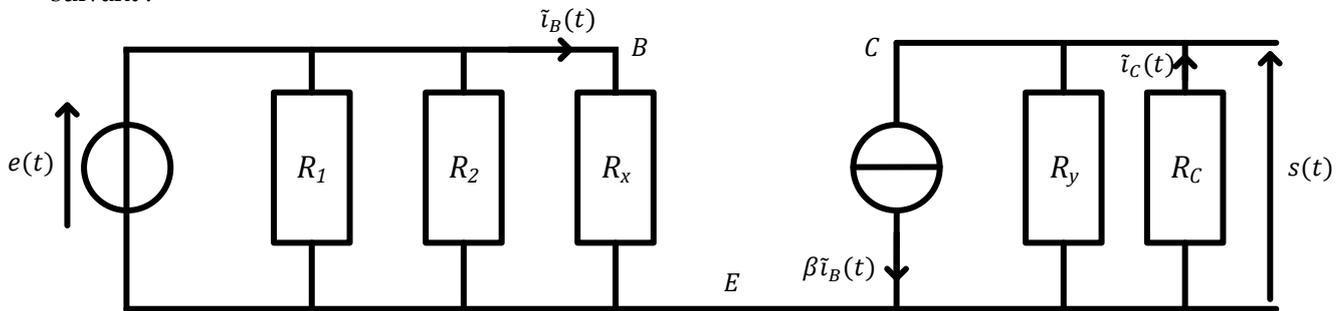
20.a. L'impédance équivalente de ce dipôle en parallèle est $Z_F = \frac{R_E}{1+jR_EC_E\omega}$. Or $R_E \gg \frac{1}{C_E\omega}$ d'après l'énoncé, donc l'impédance Z_F est équivalente à $\frac{1}{jC_E\omega}$, qui est donc une impédance de module négligeable devant les résistances du circuit. Ainsi, l'association de R_E et C_E est équivalente à un court-circuit.

20.b. C_0 et C_S sont des condensateurs de découplage. Ils permettent de filtrer les composantes continues des grandeurs électriques. Ainsi $e(t)$ et $s(t)$ peuvent être de valeurs moyennes nulles alors que V_B et V_C ne le sont pas, comme on l'a vu plus haut.

21. Le potentiel du point le plus haut de la figure 11 est fixé par V_0 : il est constant. Du point de vue des grandeurs alternatives, ce point est donc à potentiel nul.

NB : On peut le dire autrement : du point de vue des grandeurs alternatives, le générateur de tension V_0 est l'équivalent d'un court-circuit.

R_E est court-circuitée, en alternatif, d'après la réponse à la question 20.a. On obtient donc le schéma équivalent suivant :



22. NB. L'hypothèse régime harmonique n'a pas d'importance ici car en régime alternatif toutes les impédances des condensateurs ont été négligées et il ne reste que des résistances. Toutes les impédances étant réelles, le gain le sera aussi.

On cherche à déterminer $H = \frac{s(t)}{e(t)}$, l'intensité de sortie étant prise égale à 0. Il suffit de remarquer que $\tilde{v}_{BE}(t) = e(t)$ et que $\tilde{v}_{CE}(t) = s(t)$.

La loi des nœuds à droite donne : $\tilde{i}_c = \beta \tilde{i}_B + \frac{\tilde{v}_{CE}}{\rho}$, donc $\tilde{i}_c = \frac{\beta}{r} e(t) + \frac{s(t)}{\rho}$.

Or $\tilde{i}_c = -\frac{s(t)}{R_C}$, donc $-s(t) \left[\frac{1}{R_C} + \frac{1}{\rho} \right] = \frac{\beta e(t)}{r}$ et finalement :

$$H = -\frac{\beta \rho R_C}{r(\rho + R_C)}$$

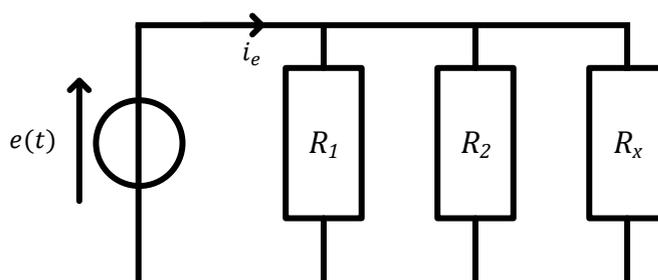
L'application numérique donne :

$$H = 200 \times 1.10^4 \times \frac{5.10^2}{1.10^3 \times 1,05.10^4}$$

Donc $H \approx -95$. Ce gain est élevé. En pratique il dépendra bien sûr de la fréquence car on a ici négligé l'influence de l'impédance des condensateurs.

23. L'impédance d'entrée est réelle, il s'agit d'une résistance que l'on note r_E (pour éviter toute confusion avec R_E). On a $r_E = \frac{e}{i_e}$ (il s'agit de la résistance équivalente « vue » par la source de tension $e(t)$).

Il suffit de remarquer que la partie droite du montage n'intervient pas dans la relation entre e et i_e . On a donc :



Ainsi, $\frac{1}{r_E} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_x}$ et $r_E = \frac{R_1 R_2 r}{R_1 R_2 + R_2 r + R_1 r}$, donc numériquement : $r = 10^3 \times \frac{13 \times 25}{13 \times 25 + 13 + 25} \approx 9.10^2 \Omega$. Cette valeur est relativement faible pour une impédance d'entrée. Elle est toutefois suffisante sans adaptation d'impédance si le générateur a une impédance interne de 50Ω .

24. $\frac{\delta Q}{dt}$ a la dimension d'une puissance donc d'après l'équation fournie la dimension de η est **une puissance par unité de température**. Elle s'exprime donc en $\mathbf{W.K^{-1}}$ dans le système international.

25. Le système considéré est le boîtier. Sa variation d'enthalpie s'écrit, d'après le premier principe de la thermodynamique : $dH = \delta Q + \delta Q'$, où $\delta Q' = \mathcal{P}dt$ est la puissance reçue par échauffement du circuit.

Ainsi :

$$CdT = \eta(T_0 - T(t))dt + \mathcal{P}dt$$

Ceci se met sous la forme d'une équation différentielle :

$$C \frac{dT}{dt} + \eta T(t) = \mathcal{P}$$

26. Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.

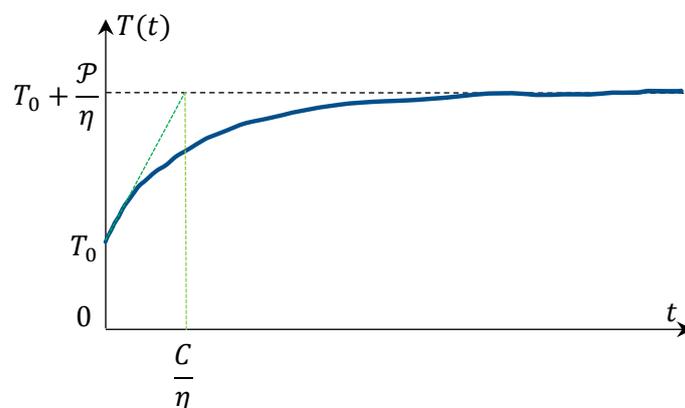
Une solution particulière de l'équation est $T_p = \frac{\mathcal{P}}{\eta}$.

La solution générale de l'équation sans second membre s'écrit : $T_h(t) = Ae^{-\frac{t\eta}{C}}$, avec $A \in \mathbb{R}$ à déterminer.

Finalement la solution générale de l'équation s'écrit : $T(t) = \frac{\mathcal{P}}{\eta} + Ae^{-\frac{t\eta}{C}}$, et à $t = 0$, $T(0) = T_0$, donc :

$$T(t) = T_0 + \frac{\mathcal{P}}{\eta} \left(1 - e^{-\frac{t\eta}{C}} \right)$$

La solution de cette équation a la forme suivante :



27. On doit avoir $\frac{\mathcal{P}}{\eta} \leq T_{max} - T_0$, donc $\eta \geq \frac{\mathcal{P}}{T_{max} - T_0}$. On a donc $\eta \geq 0,5 \mathbf{W.K^{-1}}$, ce qui correspond à une valeur usuelle pour ce type d'applications. On peut prendre $\eta = 0,5 \mathbf{W.K^{-1}}$ pour éviter de surdimensionner le dissipateur (encombrement et coût).

Lors de l'extinction de l'amplificateur, le régime transitoire conduisant au retour à la température ambiante a une durée caractéristique $\tau = \frac{C}{\eta}$. On peut considérer que le boîtier est refroidi au bout de $\Delta t = 3\tau$, c'est-à-dire :

$\Delta t = 3 \times \frac{200}{0,5} = 1200 \text{ s}$. Le refroidissement dure environ 20 minutes.