

PHYSIQUE II

Durée : 4 h

La calculatrice n'est pas autorisée.

L'énoncé de cette épreuve comporte 10 pages dont un formulaire à la fin de l'énoncé.

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

— Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.

— Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

— On prendra bien soin d'exprimer les résultats littéraux en fonction des données du problème

Les données et approximations utiles sont disponibles en fin de sujet page 10 ou dans l'énoncé.

Problème I. Machine thermo-gravitationnelle

Pour les applications numériques, on utilisera dans ce problème les valeurs suivantes :

Masse molaire de l'air : $M_{air} = 3 \cdot 10^1 \text{ g.mol}^{-1}$

Masse molaire de l'hélium : $M_{He} = 4 \text{ g.mol}^{-1}$

Préliminaires : mouvement d'un ballon dans une atmosphère isotherme

On assimile l'air à un gaz parfait de masse molaire M_{air} à l'équilibre thermodynamique à la température T_a uniforme. On considère sa pression $P_a(z)$ et sa masse volumique $\rho_a(z)$ variables avec l'altitude z . On suppose connue la pression $P_0 = 1 \text{ bar}$ au niveau du sol ($z = 0$). Le référentiel terrestre R_T dans lequel se place l'étude est supposé galiléen.

1. En faisant un bilan des forces sur un volume élémentaire cubique d'air au repos, retrouver l'expression du gradient de pression ambiante en fonction de ρ_a et du champ de pesanteur \vec{g} .
2. Donner l'équation des gaz parfaits en variables P_a , T_a et ρ_a .
3. En déduire une équation différentielle sur $P_a(z)$.
4. Établir alors la solution de l'équation différentielle sous la forme :

$$P_a(z) = P_0 e^{-z/H}$$

où H est une constante à exprimer. Donner l'interprétation du facteur $e^{-z/H}$.

5. Calculer la valeur numérique de H pour $T_a = 300 \text{ K}$.

On considère un ballon sphérique en mouvement dans cette atmosphère. Le ballon est rempli de n moles d'hélium, assimilé à un gaz parfait de masse molaire M_{He} . L'hélium est supposé à une température constante T différente de T_a . La paroi du ballon est supposée souple (de raideur nulle) de sorte que la pression dans le ballon est identique à la pression ambiante. La masse de la paroi du ballon est supposée négligeable devant celle de l'hélium. On repère la position du centre du ballon par sa cote z , on note $V(z)$ le volume correspondant du ballon.

6. Exprimer $V(z)$.
7. On suppose que le mouvement du ballon ne modifie pas $P_a(z)$. Donner l'expression générale de la résultante des forces de pression s'exerçant sur le ballon en mouvement. Donner en le justifiant sa direction et son sens.
8. Le ballon est supposé immobile. Montrer cette résultante s'écrit $\vec{F}_{\Pi} = -m_a \vec{g}$ (poussée d'Archimède) où m_a est une masse à préciser.

À quelle condition supplémentaire la poussée d'Archimède sur le ballon peut-elle s'écrire :

$$\vec{F}_{\Pi} = -\rho_a V \vec{g} ?$$

Cette condition sera supposée réalisée dans la suite du problème, et le mouvement du ballon suffisamment lent pour utiliser cette expression pour \vec{F}_{Π} .

Machine thermo-gravitationnelle

Une machine thermique est constituée d'une roue verticale de diamètre $D = 2 \text{ m}$, en rotation, à la périphérie de laquelle sont régulièrement attachés N ballons identiques au précédent, remplis chacun de n moles d'hélium gazeux (figure 1 gauche). L'ensemble baigne dans l'air, toujours assimilé à un gaz parfait, de température T_a uniforme, de pression $P_a(z)$ et masse volumique $\rho_a(z)$ variables avec l'altitude z . L'ensemble est placé entre deux thermostats (source chaude de température $T_c = 320 \text{ K}$ et source froide de température $T_f = 280 \text{ K}$ (voir figure 1).

Le mouvement de chaque ballon se décompose en quatre transformations (figure 1 droite) :

- de l'état (1) à (2) : à altitude supposée constante ($z \approx 0$), le ballon, en contact avec la source chaude, se réchauffe jusqu'à T_c en se dilatant.
- de l'état (2) à (3) : le ballon s'élève alors que sa température reste inchangée.
- de l'état (3) à (4) : à altitude supposée constante ($z \approx D$), le ballon, en contact avec la source froide, se refroidit jusqu'à T_f en se comprimant.
- de l'état (4) à (1) : le ballon descend alors que sa température reste inchangée.

On suppose que le contact avec les sources de chaleur ne crée pas d'efforts mécaniques. La paroi des ballons est supposée souple (de raideur nulle) de sorte que la pression dans un ballon est identique à la pression ambiante. On supposera de plus que la température de l'air T_a est la moyenne de la température des sources chaude et froide.

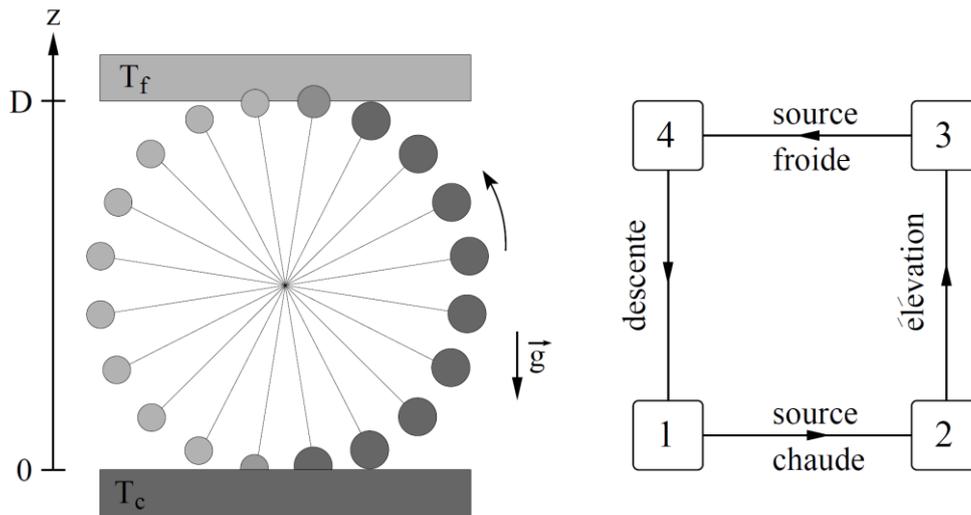


Figure 1 : Représentations de la machine thermique.

9. Justifier numériquement que la résultante des actions mécaniques s'exerçant sur un ballon est motrice lorsqu'il passe de l'état (2) à l'état (3).

10. Représenter le cycle d'un ballon dans le diagramme (P, T) et placer les états (1), (2), (3) et (4).

11. Représenter le cycle d'un ballon dans le diagramme (P, V) et placer les états (1), (2), (3) et (4).

On souhaite tout d'abord caractériser les différents travaux des actions mécaniques s'exerçant sur un ballon au cours du cycle. On exprimera ces travaux en fonction de g , n , M_{air} , R , T_f , T_c , D et H .

On suppose que chaque ballon possède un mouvement de translation. On admet qu'on peut alors décomposer le travail des forces de pression extérieures exercées sur un ballon en deux contributions, une correspond alors au travail de la poussée d'Archimède, appliqué au centre du ballon, noté W_{Π} , l'autre noté W'_P correspondant à la variation de volume du ballon comme si le centre du ballon était fixe dans R_T .

12. On s'intéresse tout d'abord au travail du poids d'un ballon.

Pendant quelle(s) transformation(s) ce travail est-il non nul ?
Déterminer le travail du poids pendant un tour.

13. On s'intéresse ensuite au travail des forces de pression W_{Π} correspondant à la contribution de la poussée d'Archimède.

Pendant quelle(s) transformation(s) ce travail est-il non nul ?

Exprimer la poussée d'Archimède pour un ballon lors de la transformation (2) \rightarrow (3). En déduire l'expression du travail correspondant.

Exprimer le travail W_{Π} de la poussée d'Archimède sur un tour. Calculer numériquement W_{Π} pour $n = 1$ mol.

14. On s'intéresse enfin au travail supplémentaire des forces de pressions W'_P correspondant à la variation de volume d'un ballon.

Exprimer ce travail des forces de pression pour chacune des quatre transformations (noté $W'_{1 \rightarrow 2}$ etc.).

En déduire leur travail W'_P sur un cycle complet de la machine.

15. Caractériser le travail utile que la machine peut fournir. Proposer une solution pratique pour récupérer cette énergie.

16. Exprimer l'énergie fournie par la source chaude à un ballon en fonction des données précédentes, de M_{He} et de la capacité calorifique massique de He à P constante : $C_p = 3 \cdot 10^3 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

17. Déduire des questions précédentes le rendement. On donnera le résultat en fonction de C_p , g , D , T_f , T_c , M_{air} et M_{He} . Calculer numériquement ce rendement.

18. Le rendement déterminé à la question précédente est-il toujours inférieur à 1 ?
Commenter.

Problème II : Manipulation d'une molécule unique à l'aide de "pinces optiques"

Depuis une vingtaine d'années, de nombreuses techniques ont été développées afin de manipuler physiquement des objets biologiques - cellules, organelles et macromolécules comme l'ADN. On se propose d'étudier le principe des "pinces optiques", dispositif permettant de piéger une petite bille dans un faisceau laser de faible puissance. L'importance scientifique de leur invention a été reconnue par l'attribution du prix Nobel de physique à Arthur Ashkin en 2018.

19. En 2018, un chercheur français a également reçu le prix Nobel. Citer son nom et le travail pour lequel il a été récompensé.

Dans la suite, on associera à un photon de fréquence ν une énergie $h\nu$ et une quantité de mouvement $h\nu/c_0$ où $c_0 = c/n_0$ est la célérité de la lumière dans le milieu considéré, d'indice n_0 et c la célérité de la lumière dans le vide. On traitera le problème dans le cadre de l'optique géométrique.

20. Citer les deux lois qui attribuent cette énergie et cette quantité de mouvement au photon.

21. Un faisceau de lumière monochromatique, parallèle et homogène, se propage dans un milieu d'indice n_0 . Il a une section droite d'aire σ et transporte une puissance lumineuse P_0 (exprimée en watts). Il frappe un miroir métallique parfaitement réfléchissant. On admet que l'énergie d'un photon est conservée au cours de la réflexion.

On considère une surface plane élémentaire d^2S du miroir que le faisceau frappe sous incidence θ (figure 2).

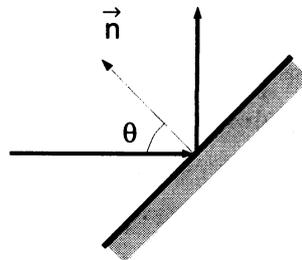


Figure 2

Justifier que le nombre de photons d^3N venant frapper la surface d^2S pendant dt est
$$d^3N = \frac{P_0}{\sigma h\nu} \cos\theta d^2S dt .$$

Quelle est la variation de quantité de mouvement $d^3\vec{p}$ de l'ensemble de ces photons lors de la réflexion? On en précisera la direction, le sens et la norme. On notera \vec{n} la normale extérieure à la surface.

22. Montrer que la surface d^2S du miroir subit de la part du faisceau une force $d^2\vec{F}$ normale à la surface. Préciser le sens d'application de cette force et exprimer son module en fonction de $n_0, c, P_0, \sigma, \theta$ et d^2S .

Justifier le nom de *pression de radiation* attribué au phénomène décrit dans cette partie.

23. Calculer numériquement la force subie par un miroir plan de surface σ pour $\theta = 0$, $P_0 = 2.10^1$ mW et $n_0 = 1,3$.

24. On considère maintenant une sphère métallique de rayon b parfaitement réfléchissante en suspension dans de l'eau d'indice n_0 et éclairée par le faisceau laser. On supposera que la sphère reste entièrement plongée dans le faisceau. On munit l'espace d'un repère orthonormé direct (O, x, y, z) , Oz étant pris parallèle à l'axe du faisceau (figure 3).

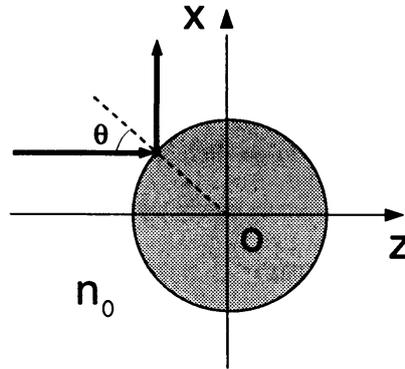


Figure 3

Démontrer que la force totale \vec{F} exercée par le faisceau sur la sphère se réduit à sa composante F_z suivant Oz et que son expression est:

$$F_z = \pi b^2 \frac{n_0 P_0}{c \sigma}$$

25. Calculer F_z pour $P_0 = 2 \cdot 10^1$ mW, $\sigma = 3 \cdot 10^{-10}$ m², $b = 2 \mu\text{m}$ et $n_0 = 1,3$.

26. De masse volumique égale à celle de l'eau, la bille est au repos en l'absence de faisceau dans le référentiel du laboratoire R_0 supposé galiléen. À $t = 0$ on illumine la sphère qui se trouve en O avec une vitesse nulle. Dans les conditions de l'expérience, la bille est soumise à une force de frottement visqueux de norme $6\pi\eta bV$ où η est la viscosité dynamique de l'eau et V la norme de la vitesse de la bille dans R_0 .

Quelle est la loi d'évolution temporelle de la vitesse pour $t \geq 0$? Justifier l'existence d'une vitesse limite notée V_∞ . À quel instant t_1 vaut elle $0,9 V_\infty$?

Calculer numériquement V_∞ et t_1 pour les données numériques de 25), en supposant la bille homogène de masse volumique $\rho = 1. \cdot 10^3$ kg m⁻³, et avec $\eta = 1. \cdot 10^{-3}$ kg m⁻¹ s⁻¹.

27. On complète le dispositif "pince optique" par un deuxième faisceau, identique au premier, mais se propageant en sens opposé le long du même axe optique Oz . Les deux faisceaux sont légèrement divergents. L'ensemble est symétrique par rapport au plan passant par O et perpendiculaire à Oz (figure 4).

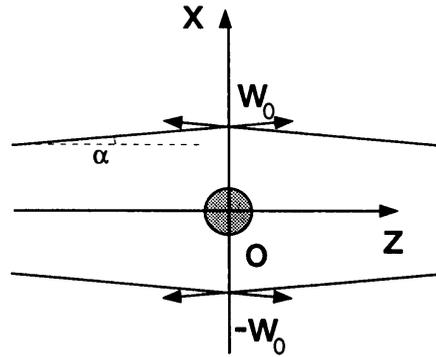


Figure 4

On supposera que l'expression de la force trouvée en 24) reste valable pour chacun des faisceaux et que l'effet dominant de la divergence est la variation de la section σ le long de l'axe. On ne considère dans cette question que les mouvements de la sphère le long de l'axe Oz . Pour les lasers considérés, les faisceaux sont limités par un cône de révolution autour de l'axe Oz . On notera $\alpha \ll 1$ leur divergence, c'est à dire l'angle que fait une génératrice du cône avec Oz , et $\sigma_0 = \pi w_0^2$ leur section commune au niveau du point O . On garde toujours $w_0 > b$.

Justifier *qualitativement* qu'en l'absence d'autre force extérieure, le point O est position d'équilibre pour la bille et que cette position est stable vis à vis de petits déplacements le long de l'axe Oz .

Donner l'expression des sections de chacun des faisceaux lasers à l'abscisse z en fonction de w_0 , α et z . En déduire la force de rappel $F_z(z)$ exercée par les faisceaux sur la bille lorsque celle-ci se trouve à l'abscisse z .

Montrer qu'au premier ordre en $\alpha z/w_0$ on peut définir, par analogie avec la force de rappel exercée par un ressort linéaire, la raideur longitudinale κ_z de la pince optique pour des déplacements le long de Oz . Exprimer κ_z en fonction de α , b , w_0 , P_0 , n_0 et c .

28. Calculer κ_z pour $P_0 = 2 \cdot 10^1$ mW, $\sigma_0 = 3 \cdot 10^{-10}$ m², $\alpha = 2.5 \cdot 10^{-2}$ rad et $n_0 = 1,3$. Comparer cette valeur à la raideur $\kappa = 1.10^{-8}$ N.m⁻¹ de la chaîne idéale d'ADN.

On se place dans la suite en $z = 0$.

29. Les faisceaux laser utilisés ont en fait une intensité $I(r)$ qui décroît avec la distance r à l'axe Oz . On définit l'intensité lumineuse comme la puissance lumineuse par unité de surface transportée par un rayon de section infinitésimale appartenant au faisceau. On prendra comme distribution radiale d'intensité pour chacun des faisceaux dans une section droite contenant O :

$$I(r) = \frac{P_0}{\pi w_0^2} \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right)$$

où w_0 est une dimension caractéristique du faisceau (*gaussien*). On supposera que $w_0 > b$. Donner l'allure de $I(r)$. Pour quelle valeur de r a-t-on $I(r) = I_{\max} / 10$? Commenter.

30. La divergence α du faisceau et son rayon caractéristique w_0 ne sont pas indépendants ; on a en effet :

$$\alpha \approx 0,5 \frac{\lambda}{w_0}$$

où λ est la longueur d'onde dans le vide du laser.

En vous appuyant sur vos connaissances d'optique, envisagez quel pourrait être le mécanisme physique sous-jacent à cette relation. Calculer numériquement λ et commenter l'utilisation des lois de l'optique géométrique dans ce problème.

31. On s'intéresse maintenant à la stabilité de l'équilibre de la bille dans la pince pour des déplacements perpendiculaires à l'axe Oz . À partir de la position d'équilibre O dans la pince à deux faisceaux gaussiens, on écarte légèrement la bille suivant Ox .

En tenant compte du gradient d'intensité justifier *qualitativement* l'existence d'une composante $F_x \neq 0$ dont l'effet est *déstabilisant*. On pourra s'appuyer sur un schéma.

32. En pratique, la bille n'est pas réfléchissante mais transparente, d'indice de réfraction n . On s'intéresse à un rayon du faisceau, parallèle à Oz , arrivant sur le dioptre sphérique sous incidence θ_i . Le plan d'incidence est Oxz (figure 5). On ne considérera que les rayons réfractés suivant les lois de Snell-Descartes par les dioptres eau/bille et bille/eau, en négligeant la perte d'énergie lumineuse par réflexion. On note θ_r l'angle que fait le premier rayon réfracté avec la normale au dioptre au point d'impact.

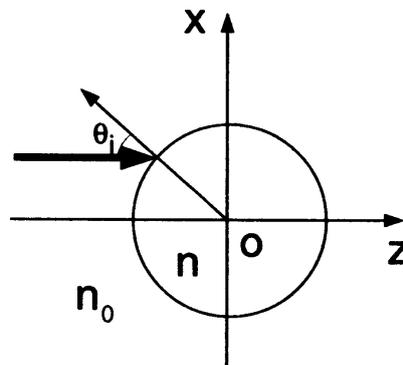


Figure 5

Représenter ces rayons. On pourra distinguer les cas $n < n_0$ et $n > n_0$. Montrer que l'angle D entre le rayon deux fois réfracté et le rayon incident vérifie la relation $D = 2(\theta_i - \theta_r)$.

En reprenant la démarche des questions précédentes, montrer *qualitativement* que la stabilité de l'équilibre de la bille vis-à-vis de petits déplacements suivant Ox dépend des valeurs respectives de n_0 et n . Préciser à quelle condition l'équilibre est stable. On se placera dans ce cas pour la suite.

33. On se place toujours en $z = 0$. Un calcul complet que l'on ne cherchera pas à reproduire ici montre que la composante F_x subie par la bille s'écrit, au premier ordre en b/w_0 :

$$F_x(x) = -\kappa_x x \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right)$$

où κ_x ne dépend pas de x .

Quelle est la signification physique de κ_x ? Justifier brièvement la dépendance $F_x(x)$.

34. On sait attacher, à l'aide de groupements fonctionnels spécifiques, l'extrémité d'une molécule d'ADN à une bille de latex. L'autre extrémité est maintenue à l'abscisse X , mesurée par rapport au centre de la pince optique (figure 6). On peut modifier X sans bouger les faisceaux. On se place dans l'approximation d'une chaîne polymère idéale de raideur κ constante et de longueur à vide nulle.

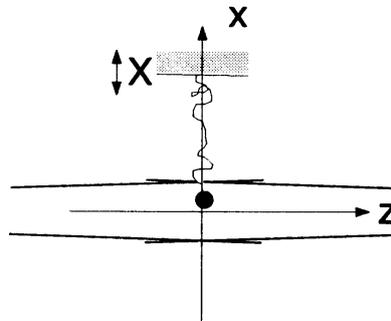


Figure 6

Justifier que si il y a une position d'équilibre, elle est située pour $0 \leq x \leq X$. Représenter $|F_x(x)|$ pour $x \geq 0$ et proposer une méthode de détermination graphique de la position d'équilibre $x_{eq}(X)$.

35. Montrer que pour $\kappa > \kappa_c$ où κ_c est une raideur à déterminer, il existe une et une seule position d'équilibre pour tout X : la pince est dite monostable. En revanche, pour $\kappa \leq \kappa_c$ il peut exister plusieurs positions d'équilibre (stable ou instable) de la bille dans la pince: la pince est multistable.

36. Le paramètre κ_x s'exprime en fonction des données du problème:

$$\kappa_x = C \frac{n_0 P_0}{c} \frac{b^3}{w_0^4}$$

où C est une constante numérique.

Compte tenu des valeurs numériques du problème, préciser la nature mono- ou multi- stable de la pince pour la molécule d'ADN de raideur $\kappa = 1.10^{-8} \text{ N.m}^{-1}$. On prendra $C = 0,5$.

37. Montrer graphiquement que dans le cas d'une pince multistable, lorsqu'on augmente X à partir de 0, la bille saute brusquement hors du piège pour une position x^* . Montrer que la force limite $F_x^* = F_x(x^*)$ est *a priori* bornée par deux valeurs que l'on exprimera en fonction de κ_x et w_0 .

Données

Constantes de la physique

Constante de Planck : $h = 7 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$.

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$.

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

Constante des gaz parfait : $R = 8 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Accélération de la pesanteur : $g = 1 \cdot 10^1 \text{ m s}^{-2}$.

Approximations

$\ln 10 \approx 2$

$\exp\left(-\frac{3}{2}\right) \approx 0.2$

$\tan \alpha \approx \alpha$ pour $\alpha \ll 1 \text{ rad}$.

Surface élémentaire d'une sphère de rayon b : $d^2 S = b^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ où θ est la colatitude.