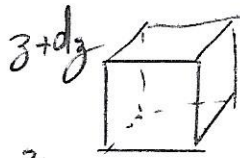


Problème I

1. { Cube d'air } au repos  avec $P_a(z)$ uniquement.

Tout de Rg. $\vec{\sigma} = \rho_a dz dy dz \vec{g} + dz dy P_a(z) \vec{u}_z - dz dy P_a(z+dz) \vec{u}_z$
(les autres forces de pression se compensent)

d'air $\rho_a \vec{g} - \frac{dP_a}{dz} \vec{u}_z = 0 \rightarrow \boxed{\vec{\text{grad}} P = \rho_a \vec{g}}$

2. $\boxed{\rho_a = \frac{P_{\text{air}} P_a}{R T_a}}$

3. D'après 1) et 2), $\boxed{\frac{dP_a}{dz} = - \frac{P_a}{R T_a} g}$

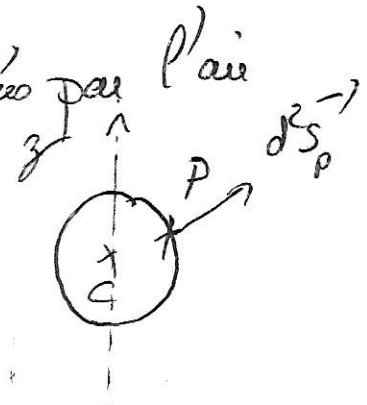
4. D'après 3) $\boxed{P_a(z) = P_0 e^{-\frac{\rho_a g z}{P_0}}} \quad \boxed{H = \frac{R T_a}{\rho_a g}}$

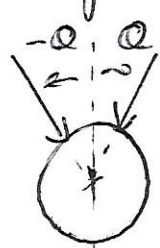
$e^{-z/H}$ est le facteur de Boltzmann. Traduit la compétition entre énergie potentielle de pesanteur (micro) mgz et agitation thermique $k_B T$.

5. AN $\underline{H} = \frac{8 \times 10^{-2}}{3 \times 10^{-2} \times 10} \sim 8 \times 10^{-3} \text{ m.}$

6. $\underline{V(z)} = \frac{m R T_a}{P_{\text{int}}} = \frac{m R T_a}{P_a(z)}$ car $P_{\text{int}} = P_a(z)$.

7. La résultante des forces de pression (extérieures) exercées par l'air sur le ballon est $\boxed{\vec{F}_\pi = - \oint_{\text{Sphère}} P_{\text{air}}(P) d\vec{S}_p}$



- Pour 2 pts symétriques par rapport axe (C_z) du ballon repérés par angles θ et $-\theta$, on a $P_a(\theta) = P_a(-\theta)$ $d^2\vec{F}(-\theta) = -d^2\vec{F}(\theta)$  $d^2\vec{F}(\theta) = -P_a(\theta)\vec{u}_z$
 $\rightarrow$ la résultante des forces de pression est selon $\vec{u}_z$
- La pression diminue avec l'altitude $\rightarrow$ résultante selon $+\vec{u}_z$

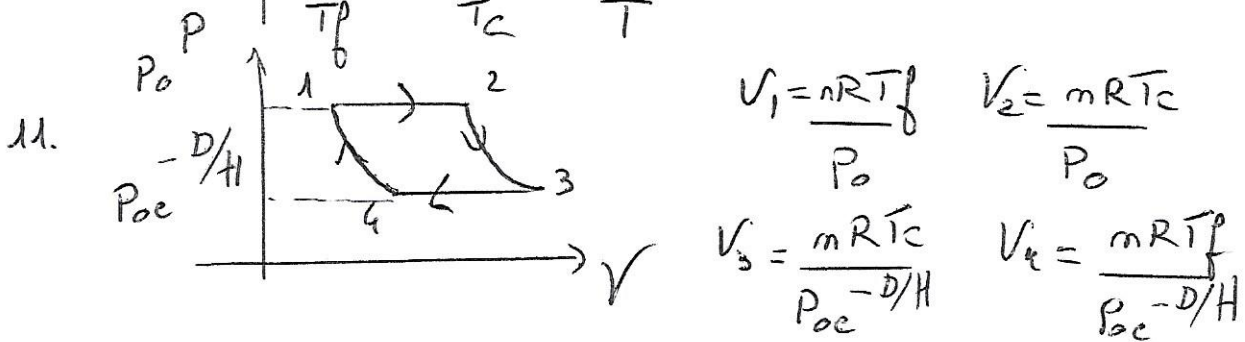
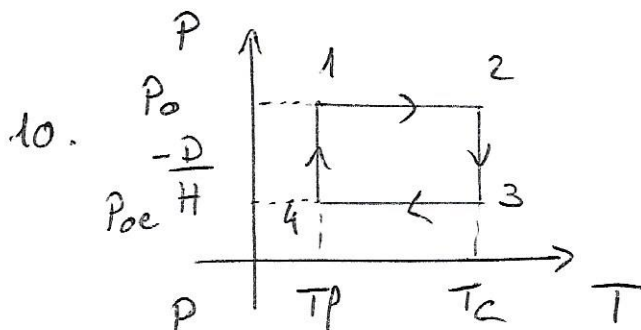
8. Démonstration du théorème d'Archimède. On remplace le ballon par volume d'air équivalent d'air en équilibre. La répartition des pressions est supposée inchangée, d'où
$$\vec{F}_\pi = - \int_V \rho_a d^3\vec{r} \vec{g}$$

Si $R \ll H$, on peut supposer $\rho_a \approx$ uniforme sur le volume du ballon
 et
$$\vec{F}_\pi \approx -\rho_a V \vec{g}$$

9. La résultante des actions mécaniques (ext) sur le {ballon} est

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_\pi + \vec{P} = m_{He} \times \eta_{He} \vec{g} - \rho_a V \vec{g} \\ &= (\rho_{He} - \rho_a) V \vec{g} = \left(\frac{\eta_{He}}{T_c} - \frac{\eta_{air}}{T_a} \right) \frac{P_a(z) V(z)}{R} \vec{g} \end{aligned}$$

Numériquement $\frac{\eta_{He}}{T_c} < \frac{\eta_{air}}{T_a}$. On a bien $\vec{F} \cdot \vec{u}_z > 0$ force motrice
 par rapport montée.



12. Travail non nul pendant transformations $2 \rightarrow 3$ et $4 \rightarrow 1$.
Force conservative $\rightarrow$ travail nul sur un tour.

13. Travail non nul pendant transformations $2 \rightarrow 3$ et $4 \rightarrow 1$

$$\vec{F}_\pi = -(\rho_a(z)/V(z))\vec{g} \quad \text{avec } \rho_a = \frac{M_{\text{air}}P_a(z)}{RT_a} \quad \text{et } V = \frac{nRT_c}{P_a(z)} \quad (\text{transf } 2 \rightarrow 3)$$

$$\text{d'au } \boxed{\vec{F}_{\pi_{2 \rightarrow 3}} = -\pi_{\text{air}} m \frac{T_c}{T_a} \vec{g} = -\pi_{\text{air}} m \times \frac{2T_c}{T_c + T_p} \vec{g}}$$

$$\text{et } \boxed{W_{\pi_{2 \rightarrow 3}} = D \pi_{\text{air}} m \frac{2T_c}{T_c + T_p} g} > 0$$

$$\text{Calcul similaire } \vec{F}_{\pi_{4 \rightarrow 1}} = -M_{\text{air}} m \frac{2T_p}{T_c + T_p} \vec{g} \quad \text{et } W_{\pi_{4 \rightarrow 1}} = -D \pi_{\text{air}} \frac{2mT_p}{T_c + T_p}$$

$$\text{d'au } \boxed{W_\pi = D M_{\text{air}} 2m \frac{T_c - T_p}{T_c + T_p} g}$$

$$\text{AN } W_\pi = \frac{2 \times 3 \times 10^{-2} \times 1 \times 40 \times 10}{300} \sim 8 \times 10^{-2} \text{ J} \quad \text{c'est peu !}$$

(Il faudrait beaucoup de ballons)

14.
$$W'_{P_{1 \rightarrow 2}} = - \int_1^2 P_{ext} dV = - P_0 [V_2 - V_1] = - nR(T_c - T_f)$$

$$W'_{P_{2 \rightarrow 3}} = - \int_2^3 P dV = - \int_2^3 m R T_c \frac{dV}{V} = - n R T_c \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = - n R T_c \frac{D}{H}$$

$$W'_{P_{3 \rightarrow 4}} = - P_0 e^{-D/H} (V_4 - V_3) = m R (T_c - T_f)$$

$$W'_{P_{4 \rightarrow 1}} = - n R T_f \ln\left(\frac{V_1}{V_4}\right) = m R T_f \frac{D}{H}$$

$$\boxed{W'_P = m R (T_f - T_c) \frac{D}{H}} \quad \text{Rq} \quad W'_P = W_\pi \quad \text{car} \quad H = \frac{n_{air} T_c}{n_{air} g}$$

15. W_{utile} correspond à celui de la poussée d'Archimède ($N \times W_\pi$)
où N nombre de ballons.

Couplage arbre avec alternateur (ou fel et poulié!)

16. Transformation 1 $\rightarrow$ 2 isobare donc $Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta H_{1 \rightarrow 2} = m C_p (T_c - T_f)$

D'aut $\boxed{Q_{4 \rightarrow 2} = m M_e C_p (T_c - T_f)}$

17.
$$\boxed{\eta = \frac{W_\pi}{Q_{12}} = \frac{D n_{air} g \cdot 2}{M_{He} C_p (T_c + T_f)}}$$

AN $\eta = \frac{2 \times 30}{4} \times \frac{10}{3 \times 10^3} \times \frac{1}{300} \approx 2 \times 10^{-4}$ c'est très (trop!) petit!

18. D'un point de vue théorique, on peut augmenter η en augmentant D , mais encore faut-il que l'approximation $D \ll H$ reste valable
par rapport à l'évaluation $\frac{2}{H} \dots$

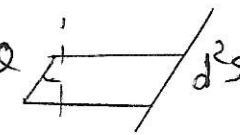
Problème II Pinces optiques.

19. Gérard Mourou a obtenu le prix Nobel de physique en 2018 pour ses travaux portant sur la production d'impulsions lumineuses ultra-brèves de forte intensité (physique des lasers.)

20. $E = h\nu \equiv$ relation de Planck - Einstein

$$p = \frac{h\nu}{c} \equiv \text{relation de de Broglie} \quad \left(\hbar k = \frac{hc}{\lambda} \right)$$

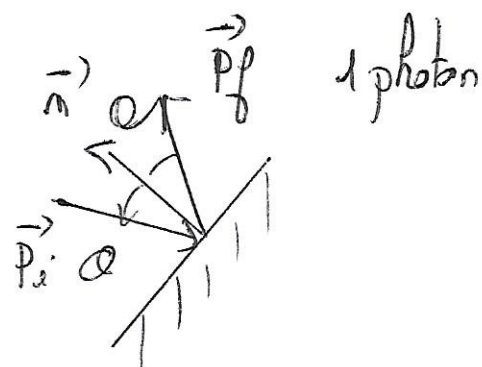
21. Le nombre d^3N correspond aux photons situés dans le cylindre de longueur $c dt$, de surface d^2S , donc de volume $c \cos\theta d^2S dt$

donc $d^3N = m c \cos\theta d^2S dt$ $m \equiv$ nbc photons / unite' Ω  d^2S de volume.

Pour déterminer m , on a $P_0 dt = m \nu c h \nu dt \rightarrow m = \frac{P_0}{\nu c h \nu}$

$$\text{d'autre} \quad \boxed{d^3N = \frac{P_0}{\nu h \nu} \cos\theta d^2S dt}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } d^3\vec{p} &= d^3N (\vec{p}_f - \vec{p}_i) \\ &= d^3N \frac{2h\nu}{c} \cos\theta \vec{m} \end{aligned}$$



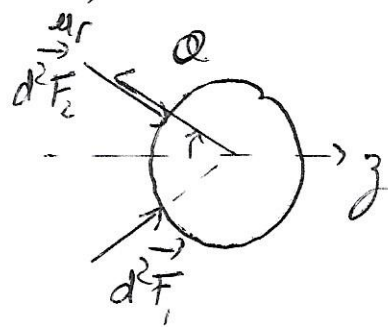
$$\text{D'autre} \quad \boxed{d^3\vec{p} = \frac{d^2S}{\nu} \frac{2P_0 \cos^2\theta}{c} \vec{m} dt} \quad \begin{aligned} &\cdot \text{selon } + \vec{m} \\ &\cdot \text{module } \frac{2P_0 \cos^2\theta d^2S dt}{\nu} \end{aligned}$$

22. TAN { photons } $\frac{d^3 \vec{p}}{dt} = d^2 \vec{F}_{\text{miroir} \rightarrow \text{photons}} = - d^2 \vec{F}_{\text{photons} \rightarrow \text{miroir}}$

D'aut $\boxed{d^2 \vec{F}_{\text{photons} \rightarrow \text{miroir}} = - \frac{2 P_0 \cos^2 \Theta d^2 S \vec{m}}{c}} \quad \propto - d^2 S \vec{m} = \underline{\text{force pression}}$

23. $\boxed{\|\vec{F}\| = \frac{m_0 2 P_0}{c}}$ AN $\|\vec{F}\| = \frac{2 \times 20 \times 10^{-3} \times 1,3}{3 \times 10^8} \approx \frac{2 \times 10^{-10} \text{ N}}{1} \quad \underline{\text{petit!}}$

24. d'après 22, $d^2 \vec{F} = - \frac{2 P_0 \cos^2 \Theta}{c} \vec{u}_r b^2 \sin \Theta d\Theta d\varphi$



En 2 pb symétriques / au (Oz), même pression

$\rightarrow$ Résultante selon $\vec{u}_z$ $\frac{\pi}{2} 2\pi$ (avec $\vec{u}_z \cdot \vec{u}_r = -\cos \Theta$)

D'aut $\vec{F} = F_z \vec{u}_z$ avec $F_z = \int \int \frac{2 P_0 \cos^3 \Theta \sin \Theta b^2 d\Theta d\varphi}{c}$

$\Theta=0 \quad \varphi=0$
 $= \left[-\frac{1}{4} \cos^4 \Theta \right]_0^{\pi/2} \times 2\pi \times \frac{2 P_0 b^2}{c}$

D'aut $\boxed{F_z = \frac{\pi b^2 m_0 P_0}{\sqrt{c}}}$

25. AN $F_z = \frac{3\lambda (2 \times 10^{-6})^2 \times 1,3}{3 \times 10^8} \times \frac{20 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-10}} \approx \frac{4 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^{-2}}{3 \times 10^{-2}} \approx 4 \times 10^{-12} \text{ N}$
très petit!

26. TAN { bille } R_g .

La poussée d'Archimède compense le poids, d'aut

$m \frac{d\vec{r}}{dt} = - 6\pi \eta b \vec{v} + \vec{F}$

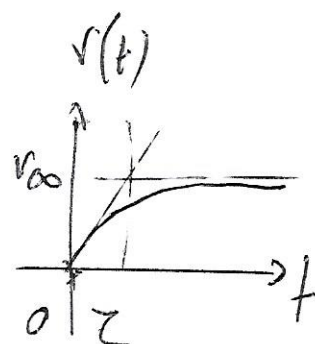
Projection selon $\vec{u}_z$ $m \frac{dv}{dt} = -\sigma \pi \gamma b v + \frac{\pi b^2 m_0 \rho}{\gamma c}$

D'aut $v = v_\infty + A e^{-t/\tau}$ avec CI $v(0) = 0$

$$v(t) = v_\infty \left[1 - e^{-t/\tau} \right]$$

$$\tau = \frac{m}{\sigma \pi \gamma b} = \frac{2 b^2 \rho}{9 \gamma}$$

$$v_\infty = \frac{b m_0 \rho}{\sigma \gamma c}$$



$$v(t_1) = 0,9 v_\infty \Rightarrow v_\infty \left[1 - e^{-t_1/\tau} \right] = 0,9 v_\infty$$

$$t_1 = \tau \ln(10) \approx 2\tau$$

AN $v_\infty \approx 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$ (faible)

$t_1 \approx 2 \mu\text{s}$

$$27. F_z = F_{\text{gauche}} + F_{\text{droite}} = \frac{\pi b^2 m_0 \rho}{\gamma} \left[\frac{1}{\gamma_G(z)} - \frac{1}{\gamma_D(z)} \right]$$

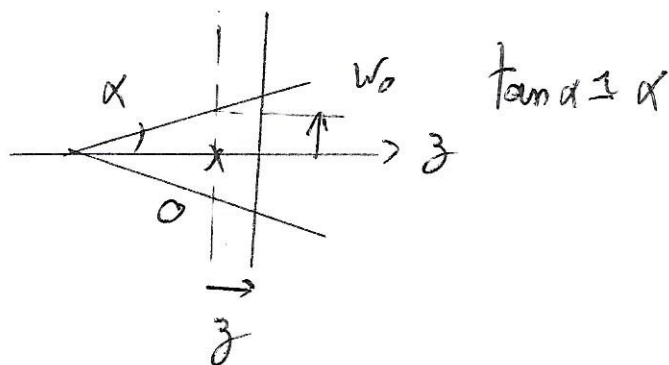
Pour $z=0$, $F_z(z=0)=0$ On a bien position d'équilibre

$z > 0$ $\gamma_G(z) > \gamma_D(z) \Rightarrow F_z < 0$ assure la stabilité de l'équilibre

(et réciproquement pour $z < 0$)

$$\gamma_G(z) = \pi w_0^2 \left[1 + \frac{z}{w_0} \tan \alpha \right]^2$$

$$\gamma_D(z) = \pi w_0^2 \left[1 - \frac{z}{w_0} \tan \alpha \right]^2$$



D'aut $F_z = \frac{\pi b^2 m_0 \rho}{c} \frac{1}{\pi w_0^2} \left[\left(1 + \frac{z}{w_0} \alpha \right)^{-2} - \left(1 - \frac{z}{w_0} \alpha \right)^{-2} \right]$ avec $\frac{\alpha z}{w_0} \ll 1$

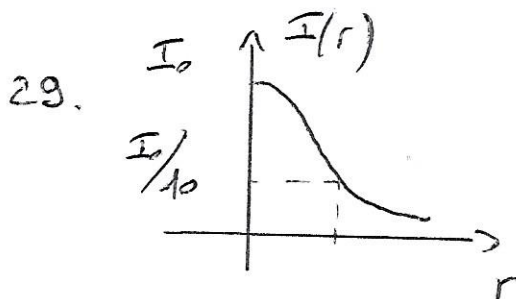
8

$$D'au \quad F_z = \frac{\pi b^2 m_0 P_0}{c} \frac{1}{\pi w_0^2} \left[-\frac{4z\alpha}{w_0} \right] = -\frac{4\alpha b^2 m_0 P_0 z}{w_0^3 c}$$

On a bien $F_z = -K_z z$ avec $K_z = \frac{4\alpha b^2 m_0 P_0}{w_0^3 c}$

28. AN $K_z = \frac{4 \times 2 \cdot 10^{-2} \times (2 \cdot 10^{-6})^2 \times 1,3 \times 20 \cdot 10^{-3}}{10^{-15} \times 3 \cdot 10^8} = \frac{8 \cdot 10^{-4} \times 4 \cdot 10^{-12} \times 10^{-8}}{10^{-7}} \text{ N.m}^{-1}$

$\left(w_0 = \sqrt{\frac{b_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^{-3}}{\pi}} \approx 10^{-5} \text{ m} \right)$ 11 ordre grandeur que ADON



$$I(r) = \frac{I_{max}}{10} \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) = \frac{1}{10}$$

Donc $r = \sqrt{\ln 10 \times w_0^2} \approx \sqrt{2} w_0$

30. Phénomène de diffraction

La divergence angulaire pour un trou de rayon w_0 serait en effet $\alpha \approx \frac{1,22 \lambda}{2w_0}$ - (Tout se passe comme si le faisceau laser diffractait sur son propre bord)

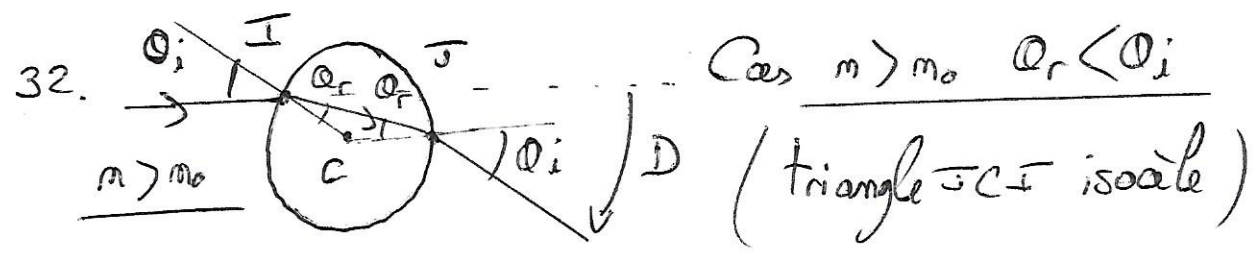
AN $\lambda = \frac{\alpha w_0}{0,5} \approx \frac{0,25}{0,5} \times 10^{-5} \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$ (vert.) visible

On a bien $\lambda \ll w_0$ - On a $\lambda \approx \frac{2b}{8}$ on peu limite/optique géométrique.

31. Si la bille est centrée sur axe (O_z), $F_x = 0$ d'après 21.

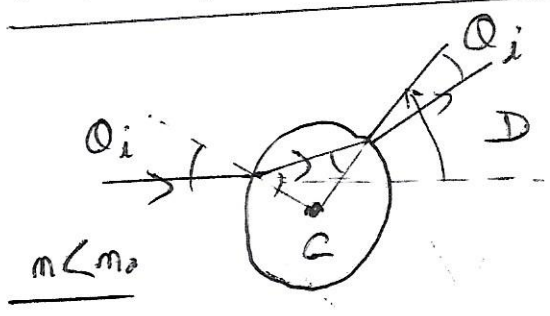
Si la bille s'écarte (par exemple $x > 0$), il y a moins de photons frappant sur la partie supérieure de la bille que sur la partie inférieure, donc $\Delta p_{x \text{ tot}} < 0$ d'après 21 et $F_x \text{ photons} \rightarrow \text{bille} > 0$

On a donc un effet déstabilisant



$D = (Q_i - Q_r) + (Q_i - Q_r) = 2(Q_i - Q_r) > 0$ $\Delta p_x > 0$ stabilisant

Cas $m < m_0$ $Q_r > Q_i$ $D < 0$ On est ramené $\Delta p_x < 0$
donc effet déstabilisant



33. k_x est à nouveau un coefficient de raideur élastique, mais la force n'est plus proportionnelle au déplacement x , à cause de la répartition énergétique du faisceau laser.

34 { bille } à l'équilibre - T.P. 11. $\vec{u}_x$

10

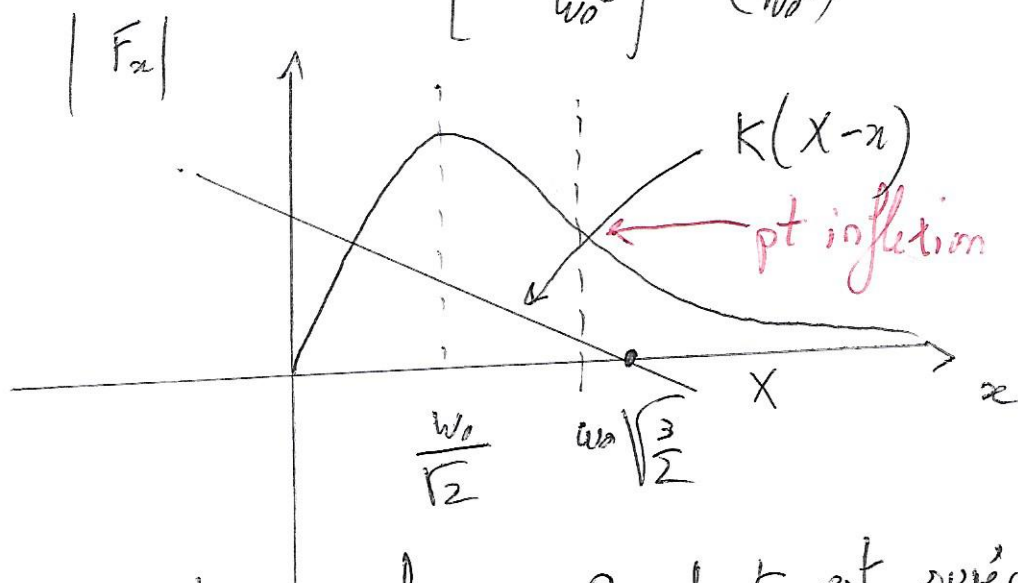
$$0 = F_x + k(X-x) \quad \left(x \leq X \text{ nécessairement} \right)$$

Donc $K_x x \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) = k(X-x)$ donc eq dans partie $x \geq 0$

On trace l'intégration de $K_x x \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right)$ et de $k(X-x)$

La fonction $f(x) = K_x x \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right)$ présente un maximum pour

$$f'(x) = K_x \left[1 - \frac{2x^2}{w_0^2} \right] \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) = 0 \rightarrow \underline{x = \frac{w_0}{\sqrt{2}} \quad (x \geq 0)}$$



35. Etude graphique - Quand K est supérieur à la valeur absolue de la pente de la tangente au pt d'inflexion de $K_x x \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right)$, il ne peut y avoir qu'une position d'équilibre

Le point d'inflexion est obtenu pour $\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = k_x \exp\left(-\frac{x^2}{\omega_0^2}\right) \left[-\frac{4x}{\omega_0^2} - \frac{2x}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{2x^2}{\omega_0^2}\right) \right]$$

$$= \frac{k_x}{\omega_0^2} \exp\left(-\frac{x^2}{\omega_0^2}\right) \left[-6x + \frac{4x^3}{\omega_0^2} \right] \text{ d'annule } x = \sqrt{\frac{3}{2}} \omega_0$$

En ce pt la pente vaut

$$k_x \left[1 - 2x \frac{3}{2} \right] \exp\left(-\frac{3}{2}\right) = -2k_x \exp\left(-\frac{3}{2}\right)$$

→ Pour $K \geq 0,4 k_x$ 1 seule position d'équilibre.

AV $k_x = \frac{95 \times 1,3 \times 10^{-3} (2 \times 10^{-6})^3}{3 \times 10^8 \times (10^{-5})^4}$

$$\approx \frac{4 \times 10^{-2} \times 10^{-18}}{10^8 \times 10^{-20}} \approx 4 \times 10^{-8} \text{ N.m}^{-1}$$

$0,4 k_x \approx 2 \times 10^{-8} \text{ N}$ → $K < 0,4 k_x$ multistable