

I Etude des caractéristiques de la goutte

$$1> [\gamma] = [E/L] = \frac{[\text{énergie}]}{[\text{surface}]} = \frac{ML^2T^{-2}}{L^2} = \underline{MT^{-2}}$$

$$(\text{unité : } J.m^{-2} \text{ ou } kg.s^{-2} \text{ ou } N.m^{-1})$$

$$E_s = \gamma [\pi R^2 \cdot 2 + 2\pi R h] \quad \text{or} \quad \Omega = \pi R^2 h$$

$$D'où \quad E_s = \gamma \left[2 \frac{\Omega}{h} + \text{terme négligeable} \right]$$

$$\boxed{E_s \approx 2\gamma \frac{\Omega}{h}}$$

$$2> E_p = \rho \Omega g z_0 \quad (\text{application formule du cours})$$

$$\boxed{E_p = \rho \Omega g \left(e_0 + \frac{h}{2} \right)}$$

$$3> E_p = 2\gamma \frac{\Omega}{h} + \rho \Omega g \frac{h}{2} + \text{cte}$$

$$\text{Si on prend l'origine de } E_p \text{ en } z = e_0, \text{ on obtient} \quad E_p = 2\gamma \frac{\Omega}{h} + \rho \Omega g \frac{h}{2}$$

$$\frac{dE_p}{dh} = -2\gamma \frac{\Omega}{h^2} + \rho \Omega g \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{dE_p}{dh} = 0 \Leftrightarrow 2\gamma \frac{\Omega}{h^2} = \frac{\rho \Omega g}{2} \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{h = h_e = \sqrt{\frac{4\gamma}{\rho g}}}$$

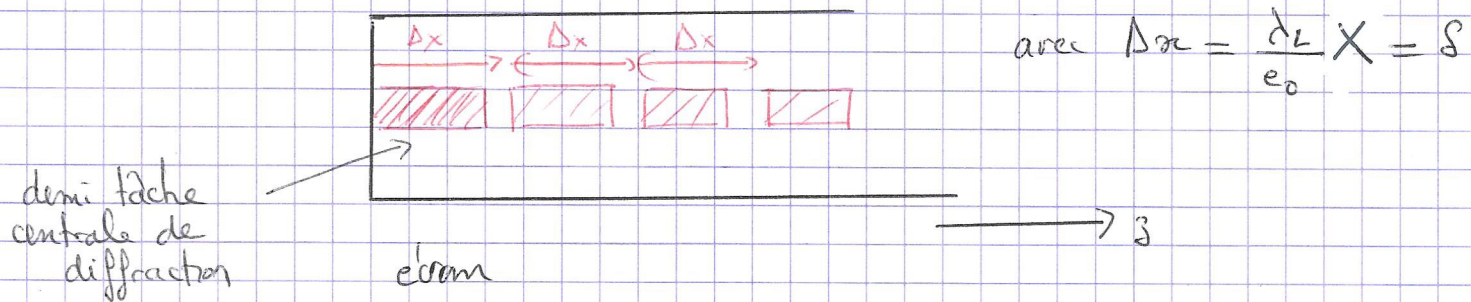
$$\boxed{h_e = 2l_c}$$

$$\text{AN} \quad l_c = \sqrt{\frac{60 \cdot 10^{-3}}{10^3 \cdot 10}} = \sqrt{6} \cdot 10^{-3} m \approx 2 \text{ mm}$$

$$\underline{h_e \approx 4 \text{ mm}}$$

4) On observe le phénomène de diffraction (modification du front d'onde du laser à la traversée de la couche de vapeur)

En supposant l'écran suffisamment loin de la couche de vapeur, pour pouvoir invoquer la diffraction de Fraunhofer (diffraction à l'infini) et en assimilant le film de vapeur à une ouverture rectangulaire de largeur e_0 et de longueur l , on s'attend à observer sur l'écran une figure ayant l'allure suivante.

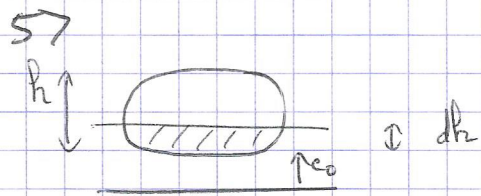


Pour mesure S on peut effectuer la mesure sur 4 périodes (pour gagner en précision)

$$4S \approx 35 \cdot \frac{10 \text{ mm}}{20} \Rightarrow \underline{S = 5 \text{ mm}}$$

$$\boxed{e_0 = \frac{\lambda_L X}{S}}$$

$$\text{AN} \quad \underline{e_0 = 6 \cdot 10 \text{ } \mu\text{m}}$$



On considère comme système la quantité d'eau se vaporisant pendant dt de masse $\dot{m} dt$ (3)

On suppose la transformation monobare et isotherme et on écrit le 1er principe entre t et $t+dt$

$$dH = (\dot{m} dt) L = \phi dt$$

$$\Rightarrow \dot{m} L = \frac{\pi R^2 \lambda \Delta T h}{e_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{m} = \frac{\lambda \Delta T}{L e_0} \pi R^2}$$

AN $\dot{m} = \frac{25 \cdot 10^{-3} \pi (40 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 200}{2,3 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 10^{-6}} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ kg s}^{-1}$

Estimation rapide de la durée de la goutte

$$\tau_v = \frac{\text{masse totale}}{\dot{m}} = \frac{\rho_e \pi R^2 h}{\lambda \Delta T \pi R^2} L e_0$$

$$\boxed{\tau_v = \frac{\rho_e h L e_0}{\lambda \Delta T}}$$

$$\tau_v = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 3 \times (40 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-5}}$$

$$\tau_v \approx 1 \cdot 10^2 \text{ s} \approx 2'$$

67

$$\dot{m} = - \frac{d}{dt} (\rho_e \pi R^2 h_e) = - \rho_e \pi h_e 2 R \frac{dR}{dt} = \frac{\lambda \Delta T}{L e_0} \pi R^2 \quad \text{par conservation}$$

de la masse d'eau

On en déduit
$$- \rho_e \pi h_e 2 R \frac{dR}{dt} = \frac{\lambda \Delta T}{L e_0} \pi R^2 \left(\frac{e l g t_c L e v}{\lambda \Delta T \eta} \right)^{1/4} \frac{1}{R^{1/2}}$$

On en déduit

$$\frac{\dot{R}}{\sqrt{R}} = -\alpha \quad \text{avec}$$

$$\alpha = \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda \Delta T}{L e_{\text{eff}}} \right)^{3/4} \left(\frac{g \rho \sigma}{\gamma} \right)^{1/4}$$

(4)

7)

$$\frac{\dot{R}}{\sqrt{R}} = -\alpha = \frac{dR}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}}$$

$$\Leftrightarrow -\alpha dt = \frac{dR}{\sqrt{R}}$$

En intégrant, on obtient $2\sqrt{R} - 2\sqrt{R_0} = -\alpha t$

$$\Leftrightarrow \sqrt{R(t)} = \sqrt{R_0} - \frac{\alpha t}{2}$$

$$\Leftrightarrow R(t) = R_0 \left(1 - \frac{\alpha t}{2\sqrt{R_0}} \right)^2$$

$$R(t) = R_0 \left(1 - \frac{t}{\tau} \right)^2 \quad \text{avec}$$

$$\tau = \frac{2\sqrt{R_0}}{\alpha}$$

8)

La durée de vie de la goutte t_e est telle que $R(t_e) = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{t_e = \tau_v' = \frac{2\sqrt{R_0}}{\alpha}}$$

avec α en $\Delta T^{3/4}$. Ainsi si ΔT augmente t_e diminue, ce qui semble logique car le transfert thermique reçu par la goutte est plus élevé et la goutte s'évapore plus vite. ($\Delta \phi T$)

Rqve : on peut calculer pour $R = 10 \text{ mm}$ $\tau_v' = 1.10^3 \text{ s}$, ce qui est un ordre de grandeur supérieur à la réponse de la q57

9)

Les courbes théoriques passent par tous les barres d'incertitudes expérimentales pour $t \leq 200 \text{ s}$. Pour conclure quant à la validité des modèles, il faudrait en tout

sigueur, corrige également les barres d'erreur sur les valeurs théoriques.

(5)

Pour $t \gg 300$ s, la théorie s'écarte de l'expérience.

Probablement qu'à la fin de vie de la goutte, $R(t)$ tend vers 0 et on ne peut plus se placer dans le cadre d'étude $e_0 \ll R$.

Pour vérifier cette hypothèse on peut calculer e_0 à l'aide de la formule donnée dans l'énoncé pour $R = 2$ mm par exemple

$$e_0 = \sqrt{R} \left(\frac{\lambda \Delta T \eta}{\rho l e v g L} \right)^{1/4}$$

$$\Delta T = 300^\circ \text{C} \quad e_0 = \left(2 \cdot 10^{-3} \right)^{1/2} \left(\frac{25 \cdot 10^{-3} \cdot 300 \cdot 1 \cdot 10^{-5}}{1 \cdot 10^3 \times 0,6 \times 10 \times 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2,3 \cdot 10^6} \right)^{1/4}$$

$$e_0 = 0,6 \mu\text{m} = 600 \text{ nm} \approx 300 R$$

$$e_0(t) = R_0^{1/2} \left(\frac{\lambda \Delta T \eta}{\rho l e v g L} \right)^{1/4} \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \quad \text{décroissance linéaire avec le temps.}$$

$$e_0(t) = e_0(t_0) \left(1 - \frac{t}{\tau} \right)$$

$$\boxed{\frac{\Delta e_0}{e_0(t_0)} = -\frac{t}{\tau}}$$

On constate que $e_0(t)$ peut varier beaucoup sur une échelle de temps de τ mais il semblait que dans la zone ($R \approx 2$ mm), l'hypothèse $e_0 \ll R$ ou $e_0 \ll h_e = 2$ mm soit encore valable.

(6)

Il faut sans doute chercher une autre explication. Lorsque $R \sim \ell_c$, la goutte a une forme qui commence à être dominée par les forces de tension superficielle et devient sphérique et on sort donc du cadre du calcul théorique, où on a supposé la forme aplatie avec $\Omega = \pi R^2 h$.

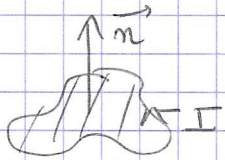
Sur la figure 4 : cas a) $R \sim 1 \text{ mm}$) ces observations corroborent
b) $R \sim 3,6 \text{ mm}$

nos hypothèses. C'est bien autour de $R \sim 1 \text{ mm}$ que le modèle commence à s'écarter de l'expérience.

Par ailleurs l'hypothèse $R \ll R$ formulée q1 n'est jamais vérifiée.

II Goutte d'oxygène en calcéfaction.

10)



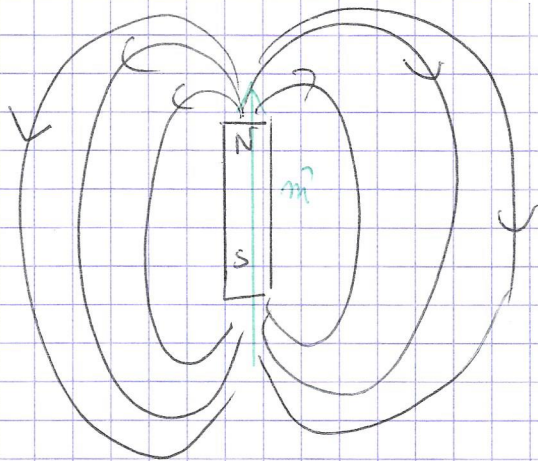
Moment dipolaire magnétique d'une boucle de courant plane

$$\boxed{\vec{m} = I S \vec{n}} \quad \text{avec} \begin{cases} I \text{ courant} \\ S \vec{n} \text{ vecteur surface de la} \\ \text{boucle de courant orientée par} \\ \text{la règle de la main droite} \end{cases}$$

En présence d'un champ magnétique, la goutte acquiert un moment dipolaire d'après l'énoncé. L'origine de l'interaction invoquée est une interaction de type dipôle / champ B , de type force de Laplace.

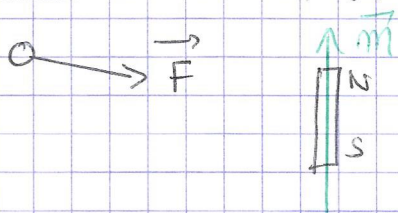
11) Ordre de grandeur de $\vec{m}$ associé à un aimant usuel ~

$$\underline{1 \text{ A} \cdot \text{m}^2} \text{ (aimant droit usuel)} \quad \underline{10 \text{ A} \cdot \text{m}^2} \text{ (petit aimant neodyme-fer-bore)}$$

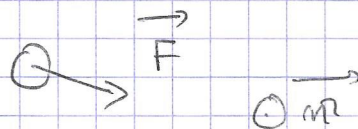


allure carte de champ
magnétique d'un aimant

La force magnétique va être dirigée vers les zones de faible E_{mag} donc de fort champ magnétique donc la force va être dirigée vers l'aimant qui attire donc la goutte d'oxygène.



vue du dessus



$$12 > \vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p = - \frac{E_0}{\left(1 + \frac{r^6}{r_0^6}\right)^2} \left(\frac{6r^5}{r_0^6} \right) \vec{u}_r$$

Cette force est centrée de centre O et dirigée vers l'aimant

$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OR} \wedge \vec{F}_{mag} + \vec{OR} \wedge (m\vec{g} + \vec{N}) = \vec{0}$ car la force $\vec{F}_{mag}$ est centrée de centre O et $m\vec{g} + \vec{N} = \vec{0}$, vu que l'on suppose le mouvement horizontal.

or $\vec{L}_O = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_3$

On en déduit $\boxed{r^2 \ddot{\theta} = cte = C}$ C'est la constante des aires
 $\boxed{r^2 \dot{\theta} = -b \text{ ou } a}$

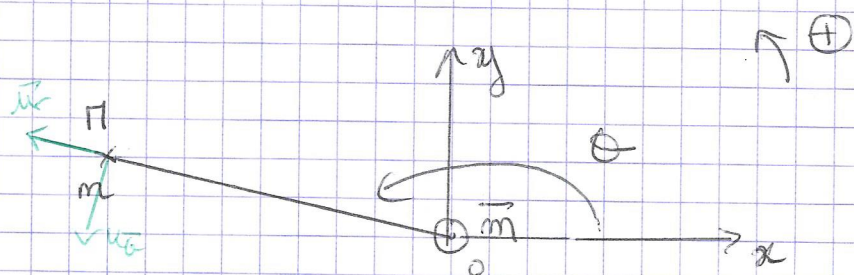
13) On suppose que la goutte ne se déforme pas au cours de l'expérience, donc les forces intérieures à la goutte ne travaillent pas.

La goutte subit les forces extérieures suivantes :

- son poids
- la réaction de la vapeur sur la goutte $\vec{N}$
- la force magnétique

Le mouvement de la goutte étant supposé horizontal, le poids ne travaille pas. On va par ailleurs supposer que $\vec{N}$ ne travaille pas car la goutte se déplaçant sur sa vapeur, on peut négliger les frottements.

On en déduit donc que le système constitué de la goutte est conservatif. On utilise les coordonnées polaires pour paramétrer le mouvement de la goutte



On suppose la goutte ponctuelle

$$E_m = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{E_0}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^6}$$

14/ JP vient ensuite :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{m c^2}{2 r^2} + E_{\text{mag}}(r)}$$

$$E_p^{\text{eff}}(r) = \frac{m b v_0^2}{2 r^2} + E_{\text{mag}}(r)$$

157

(9)

$$x \rightarrow 0 \quad E_p^{\text{eff}}(r) \sim \frac{mc^2}{2r^2}$$

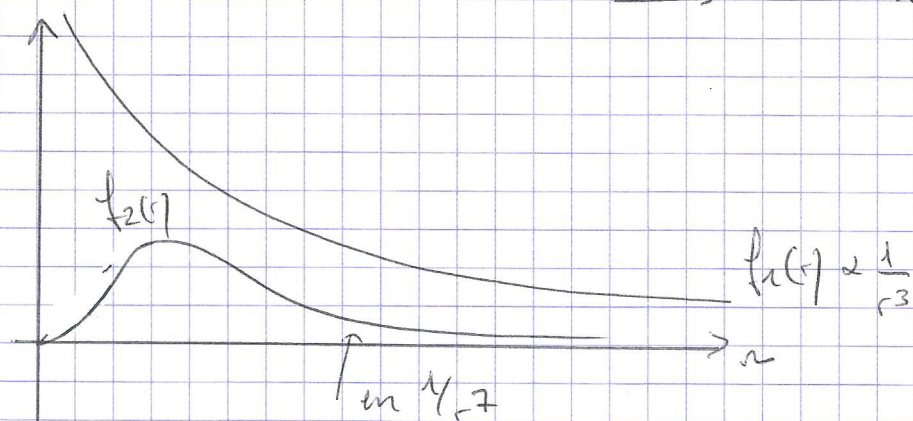
$$x \rightarrow \infty \quad E_p^{\text{eff}}(r) \rightarrow 0$$

On cherche les points r_1 et r_2 / minimum ou maximum de $E_p^{\text{eff}}(r)$

$$\begin{aligned} \frac{dE_p^{\text{eff}}}{dx} &= -\frac{2mb^2v_0^2}{2} \frac{1}{r^3} + \frac{E_0}{\left(1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^6\right)^2} \frac{6r^5}{r_0^6} \\ &= -\frac{mb^2v_0^2}{r^3} + 6E_0 \frac{r^5/r_0^6}{\left(1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^6\right)^2} = f_2(r) \\ &\quad - f_1(r) \end{aligned}$$

$$x \rightarrow 0 \rightarrow 0 \quad \sim \frac{6E_0 r^5}{r_0^6}$$

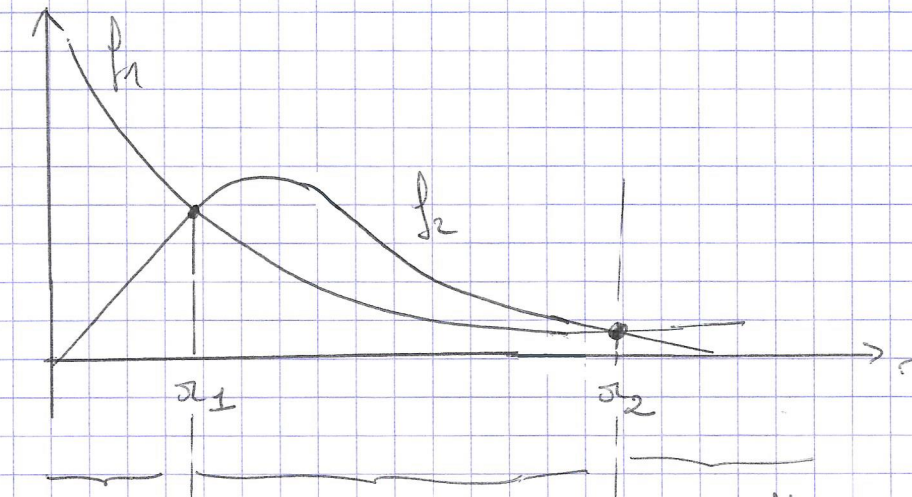
$$\begin{aligned} x \rightarrow \infty &\rightarrow \infty \quad \sim 6E_0 \frac{r^5/r_0^6}{\frac{r^{12}}{r_0^{12}}} \\ &= 6E_0 \frac{r_0^6}{r^7} \end{aligned}$$



Dans le cas de la figure ci-dessus, il n'y a aucun point d'intersection entre f_1 et f_2 donc E_p^{eff} n'admet pas d'extremum : c'est le cas de la situation $b > b^*$

Dans ce cas $f_1 > f_2$ et $\frac{dE_p^{\text{eff}}}{dx} < 0$. $E_p^{\text{eff}}(r)$ est une fonction décroissante

Dans le cas $b < b^*$



$$\frac{dE_p^{\text{eff}}}{dr} < 0$$

$$E_p^{\text{eff}} \downarrow$$

$$\frac{dE_p^{\text{eff}}}{dr} > 0$$

$$E_p^{\text{eff}} \uparrow$$

$$\frac{dE_p^{\text{eff}}}{dr} < 0$$

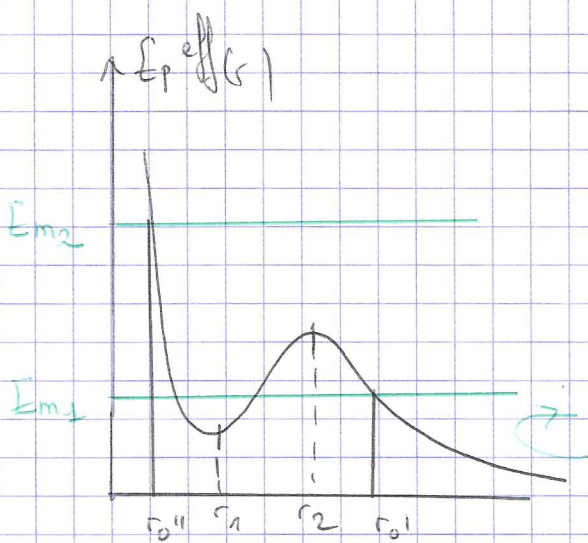
$$E_p^{\text{eff}}(r)$$

On retrouve bien
l'allure de la fig 6.

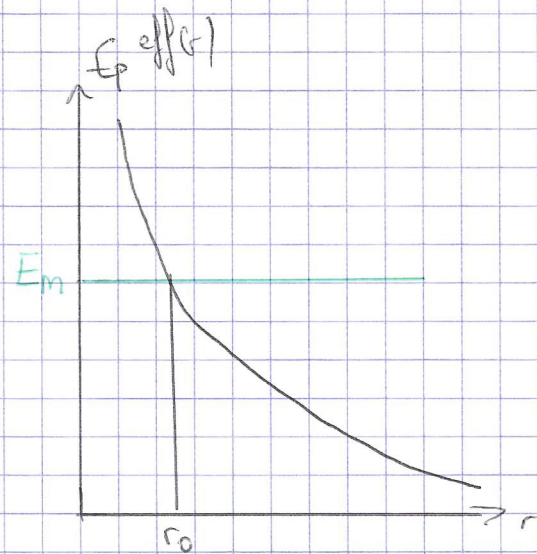
167

A $t=0$ $r \rightarrow \infty$ $\vec{v} = v_0 \vec{u}_r$ $E_m = \frac{1}{2} m v_0^2$

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{r}^2}_{>0} + E_p^{\text{eff}}(r)$$



cas $b < b^*$



cas $b > b^*$

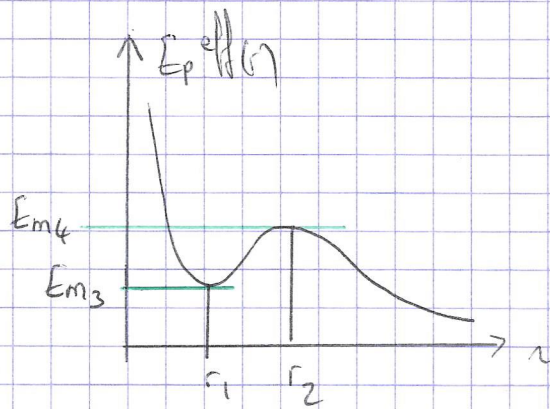
Pour $b > b^*$, il n'existe pas d'états liés. La particule vient de l'infini puis rebrousse chemin en $\alpha = \alpha_0$ quel que soit v_0 .

Pour $b < b^*$, il n'existe pas non plus d'états liés. Pour $E_m = E_{m_1}$, la particule rebrousse chemin en $\alpha = \alpha_0' > \alpha_2$ et pour $E_m = E_{m_2}$, elle rebrousse chemin en $\alpha_0'' < \alpha_1$.

$\Rightarrow$ avec les conditions initiales envisagées, des états liés sont impossibles.

Avec d'autres conditions initiales ($E_m = E_{m_1}$ et $r(0)$ pas loin de r_1), des trajectoires liées sont possibles.

17) Des trajectoires circulaires sont possibles pour des conditions initiales particulières. Pour $b < b^*$ et de telle sorte que $E_m = E_p^{\text{eff}}(r_1)$ ou $E_m = E_p^{\text{eff}}(r_2)$



2 trajectoires circulaires possibles

- en $\alpha = \alpha_1$ (stable)
- en $\alpha = \alpha_2$ (instable)

18) Avec les mêmes conditions initiales ($r \rightarrow \infty$, $v = v_0$ paramètre d'impact b), la goutte tend à tourner en $\alpha = \alpha_2$ et $E_m = E_{m_4}$ puisque l'on se rapproche de la trajectoire circulaire.

197

(12)

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_p^{\text{eff}}(r_1) + \underbrace{\varepsilon \frac{dE_p^{\text{eff}}}{dr}}_0 \bigg|_{r_1} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d^2 E_p^{\text{eff}}}{dr^2} \bigg|_{r_1} = E_{m3}$$

$$r = r_1 + \varepsilon$$

D'on en dérivant par rapport à t

$$m \ddot{\varepsilon} + \varepsilon \frac{d^2 E_p^{\text{eff}}}{dr^2} \bigg|_{r_1} = 0$$

$\varepsilon(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ | oscillations radiales sinusoidales à la

pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{d^2 E_p^{\text{eff}}}{dr^2} \bigg|_{r_1}}$$