

Klass 2022

Physique 2 – Éléments de correction

Problème 1 – Sécurité en plongée

D'après concours Centrale Supélec 2022 PSI

1 Pression et plongée

1.1 Champ de pression

1. En présence de la seule force de pesanteur, le principe fondamental de la statique des fluides s'écrit :

$$\vec{0} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P$$

Le premier terme représente la force volumique de pesanteur. Le second terme est l'équivalent volumique des forces de pression.

Remarque :

On parle ici d'équivalent volumique car les forces de pression sont des forces surfaciques.

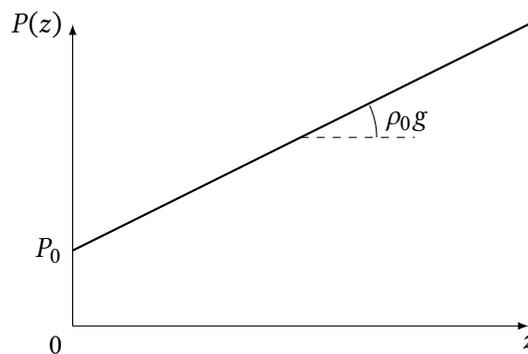
2. La projection du principe de la statique sur les axes (Ox) et (Oy) donne $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ donc le champ de pression ne dépend que de z . On en déduit :

$$0 = \rho_0 g - \frac{dP}{dz}$$

qui s'intègre en

$$P(z) = P_0 + \rho_0 g z$$

La pression est une fonction affine croissante de z :



1.2 Plongée libre

3. D'après l'équation d'état des gaz parfaits, l'air dans les poumons restant à la température T_p , on a :

$$P_0 V_m = P(z) V_h$$

On en déduit :

$$V_h = \frac{P_0}{P_0 + \rho_0 g h} V_m$$

L'application numérique donne $V_h = 0,46 \text{ dm}^3$.

4. Le volume occupé par le gaz à la profondeur h est maintenant $\frac{V_h}{2}$. La transformation du gaz dans les poumons étant isotherme, on a :

$$\begin{aligned} P(z) \frac{V_h}{2} &= P_0 V' \\ V' &= \frac{P(z) V_h}{P_0 \cdot 2} \\ V' &= \frac{P(z)}{P_0} \frac{P_0 V_m}{P(z) \cdot 2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{V' = \frac{V_m}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{V' = 2,5 \text{ dm}^3}$$

1.3 Plongée avec bouteilles

5. La quantité de matière initiale dans la bouteille est $n_0 = \frac{P_b V_b}{RT_b}$.

À chaque inspiration, le plongeur consomme la quantité $n_1 = \frac{P_0 V_p}{RT_p}$ de gaz. Après N inspirations, la quantité de matière restant dans la bouteille est :

$$\begin{aligned} n_N &= n_0 - N n_1 \\ &= \frac{P_b V_b}{RT_b} - N \frac{P_0 V_p}{RT_p} \end{aligned}$$

La pression après N inspirations est donc :

$$\begin{aligned} P_N &= \frac{n_N RT_0}{V_b} \\ &= \frac{RT_0}{V_b} \left(\frac{P_b V_b}{RT_b} - N \frac{P_0 V_p}{RT_p} \right) \\ &= P_b \frac{T_0}{T_b} - N P_0 \frac{V_p T_0}{V_b T_p} \end{aligned}$$

Comme on a $N = vt$, la loi de variation temporelle de la pression dans la bouteille est :

$$P(t) = P_b \frac{T_0}{T_b} - vt P_0 \frac{V_p T_0}{V_b T_p}$$

Et on cherche Δt tel que $P(\Delta t) = P_f$:

$$\begin{aligned} P_f &= P_b \frac{T_0}{T_b} - v \Delta t P_0 \frac{V_p T_0}{V_b T_p} \\ v \Delta t P_0 \frac{V_p T_0}{V_b T_p} &= P_b \frac{T_0}{T_b} - P_f \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\Delta t = \left(P_b \frac{T_0}{T_b} - P_f \right) \frac{V_b T_p}{v P_0 T_0 V_p}}$$

6. On considère que toutes les inspirations se font à la pression $P(h)$. Chaque inspiration consomme alors la quantité $n_1 = \frac{P(h) V_p}{RT_p}$. L'expression de la question précédente reste valable en remplaçant P_0 par $P(h)$:

$$\Delta t' = \left(P_b \frac{T_0}{T_b} - P_f \right) \frac{V_b T_p}{v P(h) T_0 V_p}$$

On en déduit donc :

$$\Delta t' = \Delta t \frac{P_0}{P(h)}$$

7. Les applications numériques donnent :

$$\Delta t = 240 \text{ min} \quad \text{et} \quad \Delta t' = 22 \text{ min}$$

Compte-tenu de l'augmentation de la pression avec la profondeur (environ $+P_0$ tous les 10 mètres), le temps de fonctionnement des bouteilles diminue rapidement lorsque le plongeur descend.

8. L'air présent dans l'atmosphère terrestre au niveau de la mer est composé à 20% d' O_2 et 80% de N_2 .
 9. L'air dans la bouteille suivant ces mêmes proportions, l'air inspiré contient toujours 20% d' O_2 quelle que soit la pression. On a donc :

$$P_{O_2}(z) = 0,2P(z) = 0,2(P_0 + \rho g z)$$

On cherche z_{\max} tel que :

$$\begin{aligned} 0,2(P_0 + \rho g z_{\max}) &= P_{O_2 m} \\ \rho g z_{\max} &= \frac{P_{O_2 m}}{0,2} - P_0 \end{aligned}$$

Donc :

$$z_{\max} = \frac{5P_{O_2 m} - P_0}{\rho g}$$

L'application numérique donne :

$$z_{\max} = 75 \text{ m}$$

Cet équipement est donc incompatible avec la profondeur h utilisée dans les questions précédentes. Pour les plongées avec bouteille à des profondeurs plus importantes, il est nécessaire d'utiliser un mélange appauvri en oxygène (qui devient alors irrespirable en surface à cause de la trop faible pression partielle de dioxygène).

Remarque :

Une fois le problème de la trop grande pression partielle d' O_2 résolu, se pose le problème d'une trop grande pression partielle de N_2 responsable de l'ivresse des profondeurs. Pour y remédier, les plongeurs utilisent des mélanges dans lesquels une partie du diazote et du dioxygène sont remplacés par de l'hélium^a ou de l'hydrogène.

^aet là, c'est le syndrome nerveux des hautes pressions qui apparaît pour des plongées à plus de 130 m

1.4 Pression et plongée à grande profondeur

10. Considérons une masse m d'eau. Le volume occupé par le fluide est alors $V = \frac{m}{\rho}$. La définition du coefficient de compressibilité isotherme devient alors :

$$\begin{aligned} \chi_T &= -\frac{\rho}{m} \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{m}{\rho} \right)_T \\ &= -\frac{\rho}{m} \left(-\frac{m}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \end{aligned}$$

On obtient bien l'expression demandée :

$$\chi_T = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_T$$

11. Le principe de la statique donne :

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{dP}{dz} + \rho g \\ &= -\frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dz} + \rho g \\ &= -\frac{1}{\rho \chi_T} \frac{d\rho}{dz} + \rho g \\ \frac{d\rho}{dz} &= \rho^2 \chi_T g \end{aligned}$$

En séparant les variables :

$$\frac{d\rho}{\rho^2} = \chi_T g dz$$

On intègre entre la surface ($z = 0$ et $\rho = \rho_0$) et la profondeur z :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} &= \chi_T g z \\ \frac{\rho_0}{\rho} &= 1 - \rho_0 \chi_T g z \end{aligned}$$

On obtient la forme proposée dans l'énoncé :

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \rho_0 \chi_T g z}$$

12. En reprenant le principe de la statique des fluides :

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{dP}{dz} + \frac{\rho_0}{1 - \rho_0 \chi_T g z} g \\ \frac{dP}{dz} &= \frac{\rho_0 g}{1 - \rho_0 \chi_T g z} \end{aligned}$$

On intègre cette expression entre la surface (pression P_0) et la profondeur z :

$$P(z) - P_0 = \rho_0 g \frac{-1}{\rho_0 \chi_T g} \ln(1 - \rho_0 \chi_T g z)$$

Finalement :

$$P(z) = P_0 - \frac{1}{\chi_T} \ln(1 - \rho_0 \chi_T g z)$$

13. Effectuons l'application numérique avec la valeur de z_{\max} fournie. On trouve :

$$P(z_{\max}) = 1,12 \times 10^8 \text{ Pa}$$

Le modèle proposé permet donc d'obtenir une très bonne approximation de la pression dans la fosse des Mariannes. L'écart à la valeur mesurée est seulement d'1% mais il pourrait être réduit en tenant compte des variations de température de l'eau avec la profondeur.

14. D'après la figure 1 et la hauteur totale de 7,30 m du sous-marin, on peut estimer à $d = 1,5$ m le diamètre de l'habitat sphérique. Le volume de l'enveloppe métallique est alors :

$$V = 4\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 e$$

où e est l'épaisseur.

La masse volumique de l'acier est du même ordre de grandeur que celle de l'eau tout en étant plus importante. On prend $\rho_{\text{acier}} = 5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

On trouve une masse d'acier :

$$m = \rho_{\text{acier}} 4\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 e \Rightarrow m = 1,8 \times 10^3 \text{ kg}$$

15. Le sous-marin reste vertical au cours de la descente. C'est donc la géométrie **c** qui est la plus adaptée.
16. On estime le diamètre total du sous-marin à $D = 2$ m, ce qui donne un rapport $\frac{L}{D} = 3,5$. La surface frontale est celle d'un disque de diamètre D :

$$S = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 = 3,1 \text{ m}^2$$

La valeur tabulée la plus proche pour C_x est $C_x = 0,87$.

17. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le sous marin est soumis à :
- son poids,
 - la poussée d'Archimède,
 - la force de traînée.

Le théorème de la quantité de mouvement appliqué au sous-marin donne, en projection sur \vec{u}_z :

$$(m + M)\dot{v} = (m + M)g - \frac{1}{2}\rho S C_x v^2 - \rho S H g$$

$$(m + M)\dot{v} = (m + M - \rho S H)g - \frac{1}{2}\rho S C_x v^2$$

$$\frac{m + M}{m + M - \rho S H} \dot{v} = 1 - \frac{\rho S C_x}{2(m + M - \rho S H)g} v^2$$

Par identification avec la forme proposée dans l'énoncé, on trouve :

$$\alpha = \frac{m + M - \rho S H}{m + M}$$

$$u = \sqrt{\frac{2(m + M - \rho S H)g}{\rho S C_x}}$$

u est la valeur de la vitesse en **régime stationnaire**.

18. Le temps caractéristique étant court devant la durée de la descente, on peut supposer que cette dernière se fait à la vitesse u .
19. D'après la question 17, la vitesse en régime stationnaire dépend de la masse volumique de l'eau et cette dernière dépend de la profondeur d'après la question 11.

Pour savoir s'il est raisonnable de supposer la masse volumique uniforme, calculons sa valeur au fond de la fosse des Mariannes ($z_{\max} = 10,9$ km). On trouve $\rho(z_{\max}) = 1,07 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

L'écart à la masse volumique en surface est donc de l'ordre de 5% et on suppose par la suite que la masse volumique est constante tout au long de la descente (et de la remontée) dans l'expression de la vitesse limite du sous-marin :

$$u = \sqrt{\frac{2(m + M - \rho_0 S H)g}{\rho_0 S C_x}}$$

Cette vitesse étant constante, la position du sous-marin lors de la descente s'exprime avec $z = -ut$ et le temps de descente vaut :

$$t_d = \frac{z_{\max}}{u} = z_{\max} \sqrt{\frac{\rho_0 S C_x}{2(m + M - \rho_0 S H)g}}$$

De même, la vitesse lors de la remontée, sans ballast, est :

$$v = \sqrt{\frac{2(\rho_0 S H - M)g}{\rho_0 S C_x}}$$

donc le temps de remontée est :

$$t_r = z_{\max} \sqrt{\frac{\rho_0 S C_x}{2(\rho_0 S H - M)g}}$$

On remarque qu'on a alors :

$$\left(\frac{z_{\max}}{t_d}\right)^2 + \left(\frac{z_{\max}}{t_r}\right)^2 = \frac{2mg}{\rho_0 S C_x}$$

En utilisant les valeurs numériques de la question 16, on trouve :

$$m = 1,2 \times 10^3 \text{ kg}$$

Remarque :

Les ballasts utilisés sur Deepsea Challenger avaient une masse de 500 kg. La masse trouvée, bien qu'un peu élevée, est du même ordre de grandeur. L'erreur peut provenir d'une mauvaise estimation de S , conduisant également à une mauvaise estimation de C_x .

20. Bien que le système de régulation de l'atmosphère soit en panne, on considère que le système de chauffage fonctionne encore et que la totalité des inspirations se fait à la température T constante.

La quantité de matière de dioxygène dans l'habitacle après la i -ième inspiration est $n_i = P_{O_2 i} \frac{V}{RT}$. La quantité de matière de dioxygène inspiré pour la $(i + 1)$ -ième inspiration est :

$$n_{\text{in}} = \frac{P_{O_2 i} V_p}{RT}$$

et la quantité de matière effectivement consommée par cette inspiration est :

$$n_a = \frac{P_{O_2 i} V_p}{4RT} = n_i \frac{V_p}{4V}$$

La quantité de matière de dioxygène restant dans l'atmosphère après cette inspiration est $n_{i+1} = n_i - n_a$ donc :

$$n_{i+1} = n_i \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)$$

En multipliant par $\frac{RT}{V}$, on trouve :

$$P_{O_2 i} = P_{O_2 i-1} \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)$$

Donc :

$$P_{O_2 i} = P_{O_2 0} \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)^i$$

21. On considère que l'air n'est plus respirable lorsque $P_{O_2 i} = P_{O_2 \ell}$, soit :

$$P_{O_2 \ell} = P_{O_2 0} \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)^i$$

On en déduit le nombre d'inspirations possibles avant que l'air ne soit plus respirable :

$$i = \frac{\ln\left(\frac{P_{O_2 \ell}}{P_{O_2 0}}\right)}{\ln\left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)}$$

En utilisant le rayon de la sphère dans laquelle se trouve le pilote donné à la question 14 et la composition de l'atmosphère initiale donnée à la question 8, l'application numérique donne :

$$i \simeq 13 \times 10^3$$

Avec 1 inspiration toutes les 4 secondes, la durée de vie du pilote serait :

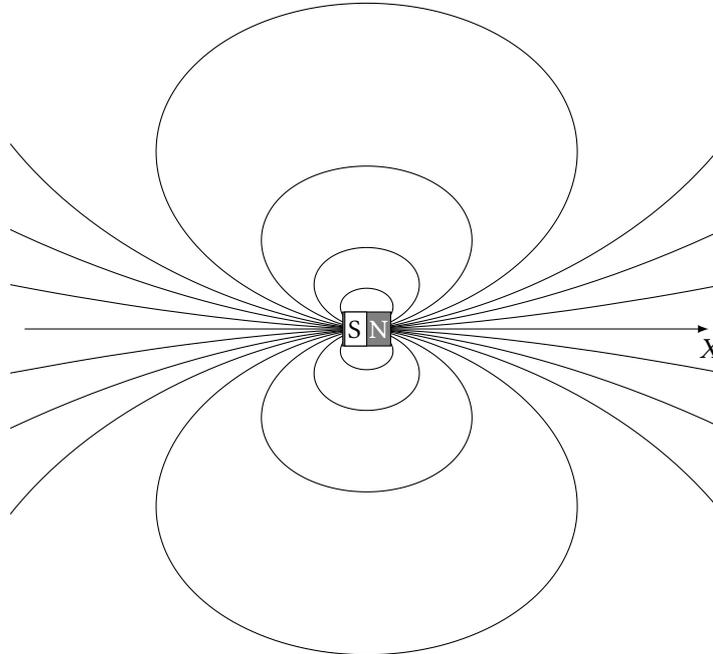
$$T_v \simeq 52 \times 10^3 \text{ s} \simeq 14 \text{ h}20 \text{ min}$$

Problème 2 — Étude d'une génératrice synchrone

D'après agrégation externe de physique, option chimie, 2007

1 Tensions statoriques à vide

1.



2. À l'instant t , l'angle entre \vec{u}_X et \vec{e}_x vaut Ωt . En projection dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , on a donc :

$$\vec{B}_0 = B_0(\cos(\Omega t)\vec{e}_x + \sin(\Omega t)\vec{e}_y)$$

3. En utilisant la règle de la main droite, les vecteurs \vec{n}_i sont tous radiaux et dirigés vers l'extérieur. On obtient immédiatement $\vec{n}_1 = \vec{e}_y$.

Le vecteur \vec{n}_3 forme un angle $\frac{\pi}{6}$ avec le vecteur \vec{e}_x donc :

$$\vec{n}_3 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{e}_x - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{e}_y = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x - \frac{1}{2}\vec{e}_y$$

De même :

$$\vec{n}_2 = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{e}_x - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{e}_y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x - \frac{1}{2}\vec{e}_y$$

4. On a $\phi_1 = N_s S \vec{B}_0 \cdot \vec{n}_1$. En utilisant les résultats des questions précédentes, on trouve :

$$\phi_1 = B_0 N_s S \sin(\Omega t)$$

Pour l'enroulement (2), le flux est donné par $\phi_2 = N_s S \vec{B}_0 \cdot \vec{n}_2$. Avec les résultats des questions précédentes, on a :

$$\begin{aligned} \phi_2 &= B_0 N_s S (\cos(\Omega t)\vec{e}_x + \sin(\Omega t)\vec{e}_y) \cdot \left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{e}_x - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{e}_y\right) \\ &= B_0 N_s S \left(-\cos(\Omega t)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin(\Omega t)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \end{aligned}$$

En utilisant $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, on trouve donc :

$$\phi_2 = -B_0 N_s S \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Enfin, pour ϕ_3 , on a :

$$\begin{aligned}\phi_3 &= B_0 N_s S (\cos(\Omega t) \vec{e}_x + \sin(\Omega t) \vec{e}_y) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \vec{e}_x - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \vec{e}_y \right) \\ &= B_0 N_s S \left(\cos(\Omega t) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin(\Omega t) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)\end{aligned}$$

$$\phi_3 = B_0 N_s S \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

- Les enroulements sont représentés en convention générateur.
- La loi de Faraday relie la force électromotrice induite dans un circuit à la variation du flux électromagnétique à travers le circuit :

$$e_k = -\frac{d\phi_k}{dt}$$

- D'après la loi de Faraday, on en déduit :

$$\begin{cases} e_1 = -\Omega B_0 N_s S \cos(\Omega t) \\ e_2 = -\Omega B_0 N_s S \sin\left(\Omega t - \frac{\pi}{6}\right) \\ e_3 = \Omega B_0 N_s S \sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

- D'après la question précédente, on a immédiatement :

$$\underline{e}_1 = -\Omega B_0 N_s S e^{j\Omega t}$$

Mettons e_2 et e_3 sous forme d'un cosinus :

$$\begin{cases} e_2 = -\Omega B_0 N_s S \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = -\Omega B_0 N_s S \cos\left(\Omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ e_3 = -\Omega B_0 N_s S \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\Omega B_0 N_s S \cos\left(\Omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

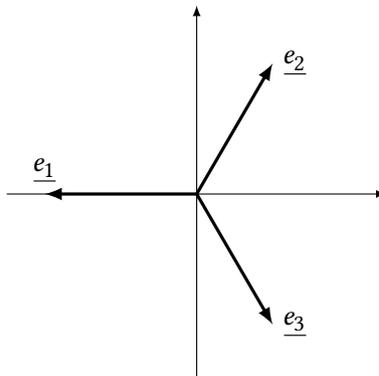
On en déduit :

$$\begin{cases} \underline{e}_2 = -\Omega B_0 N_s S e^{j\left(\Omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} \\ \underline{e}_3 = -\Omega B_0 N_s S e^{j\left(\Omega t + \frac{2\pi}{3}\right)} \end{cases}$$

Et enfin :

$$\begin{cases} E_0 = -\Omega B_0 N_s S \\ \psi_1 = 0 \\ \psi_2 = -\psi_3 = -\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

À $t = 0$:



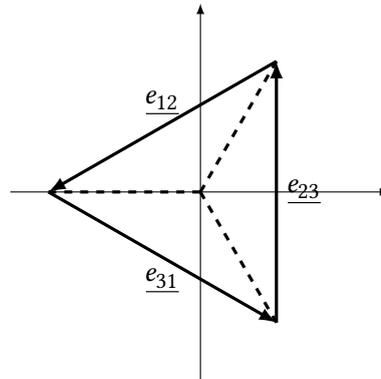
9. a) En utilisant les expressions de la question 8 :

$$e_{12} = E_0 \cos(\Omega t) - E_0 \cos\left(\Omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$e_{23} = E_0 \cos\left(\Omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - E_0 \cos\left(\Omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$e_{31} = E_0 \cos\left(\Omega t + \frac{2\pi}{3}\right) - E_0 \cos(\Omega t)$$

b) Dans le plan complexe, les représentations des tensions composées sont obtenues en faisant les différences des vecteurs associés à $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ et \underline{e}_3 déjà tracés.

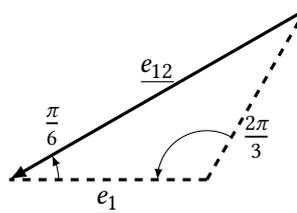


c) En notation complexe, on a :

$$\begin{aligned} \underline{e}_{12} &= E_0 e^{j\Omega t} - E_0 e^{j\left(\Omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} \\ &= E_0 e^{j\Omega t} \left(1 - e^{j\frac{2\pi}{3}}\right) \\ &= \sqrt{3} E_0 e^{j\Omega t} e^{j\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

On en déduit donc bien que l'amplitude des tensions composées est $E_l = \sqrt{3} E_0$. De plus, le déphasage de e_{12} par rapport à e_1 vaut $+\frac{\pi}{6}$.

d) Sur la représentation de Fresnel de la question 9.b), on se place dans le triangle $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_{12})$. Ce triangle est isocèle et l'angle au sommet $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ vaut $2\frac{\pi}{3}$ donc l'angle au sommet $(\underline{e}_1, \underline{e}_{12})$ vaut $\frac{\pi}{6}$: on retrouve le déphasage de e_{12} par rapport à e_1 .



$$\begin{aligned} |e_{12}| &= 2 |e_1| \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2 E_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

On retrouve bien $E_l = \sqrt{3} E_0$.

e) Les applications numériques donnent :

$$\begin{aligned} E_0 &= 19 \text{ kV} \\ E_l &= 34 \text{ kV} \end{aligned}$$

2 Modèle de Behn-Eschenburg

10. Le flux total ϕ_1^t est la somme des flux traversant l'enroulement (1) :

$$\begin{aligned}\phi_1^t &= \phi_1 + \varphi_1 + \varphi_{12} + \varphi_{13} \\ &= \phi_1 + Li_1 + M_s(i_2 + i_3)\end{aligned}$$

11. D'après la loi des nœuds : $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ donc :

$$\phi_1^t = \phi_1 + Li_1 - M_s i_1$$

$$\boxed{\phi_1^t = \phi_1 + \Lambda_s i_1}$$

12. D'après la loi de Faraday, la force électromotrice induite dans l'enroulement est :

$$\boxed{e'_1 = -\frac{d\phi_1^t}{dt} = e_1 - \Lambda_s \frac{di_1}{dt}}$$

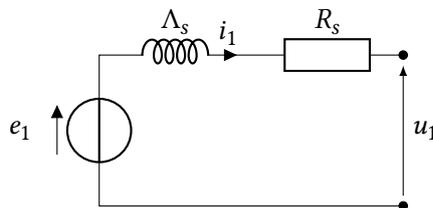
13. En tenant compte de la résistance de l'enroulement, la loi des mailles donne :

$$u_1 = e'_1 - R_s i_1$$

donc :

$$\boxed{u_1 = e_1 - \Lambda_s \frac{di_1}{dt} - R_s i_1}$$

14. Le circuit électrique équivalent à l'enroulement (1) est :

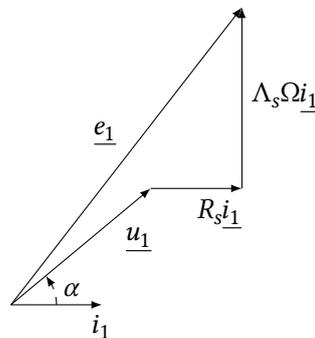


Le raisonnement tenu aux questions 10 à 13 est le même pour les enroulements (2) et (3) donc le schéma équivalent est le même pour les trois enroulements.

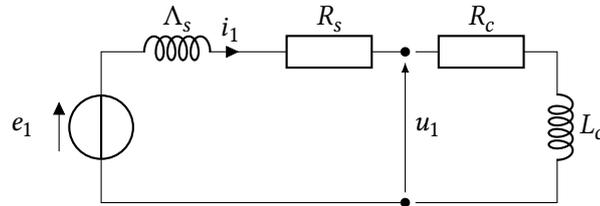
15. En notation complexe, la loi des mailles ci-dessus devient :

$$\underline{e}_1 = \underline{u}_1 + R_s \underline{i}_1 + j\Lambda_s \Omega \underline{i}_1$$

La représentation de Fresnel associée est :



16. D'après le schéma équivalent de la question 14, on a :



17. D'après la loi des mailles :

$$\underline{u_1} = (R_c + jL_c\Omega) \underline{i_1}$$

18. En prenant le module et l'argument :

$$\begin{aligned} U_{1n} &= \sqrt{R_c^2 + (L_c\Omega)^2} I_{1n} \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{L_c\Omega}{R_c}\right) \end{aligned}$$

Les trois lignes étant identiques, on obtient les mêmes résultats pour les enroulements (2) et (3).

19. L'application numérique donne :

$$\begin{aligned} I_{1n} &= 34 \text{ kA} \\ \alpha &= 0,45 \text{ rad} = 26^\circ \end{aligned}$$

20. La loi des mailles donne également :

$$\underline{e_1} = [(R_s + R_c) + j(L_c + \Lambda_s)\Omega] \underline{i_1}$$

On en déduit donc :

$$E_{0n} = \sqrt{(R_s + R_c)^2 + (L_c + \Lambda_s)^2 \Omega^2} I_{1n}$$

Et avec le résultat de la question 18 :

$$E_{0n} = \frac{\sqrt{(R_s + R_c)^2 + (L_c + \Lambda_s)^2 \Omega^2}}{\sqrt{R_c^2 + (L_c\Omega)^2}} U_{1n}$$

21. L'application numérique donne :

$$E_{0n} = 61 \text{ kV}$$

22. Les trois enroulements étant identiques, le diagramme de Fresnel est le même quels que soient u_k , i_k et e_k . Les déphasages entre les tensions simples à vide sont donc également les déphasages entre les intensités nominales. En prenant i_1 comme référence de phase, on a :

$$\begin{cases} i_1 = I_{1n} \cos(\Omega t) \\ i_2 = I_{1n} \cos\left(\Omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3 = I_{1n} \cos\left(\Omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Et les déphasages entre les tensions u_k et intensités i_k est toujours α donc :

$$\begin{cases} u_1 = U_{1n} \cos(\Omega t + \alpha) \\ u_2 = U_{1n} \cos\left(\Omega t - \frac{2\pi}{3} + \alpha\right) \\ u_3 = U_{1n} \cos\left(\Omega t + \frac{2\pi}{3} + \alpha\right) \end{cases}$$

La puissance totale délivrée par la machine synchrone est la somme des puissances des trois enroulements la constituant donc :

$$\begin{aligned} P_n(t) &= u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 \\ &= U_{1n} I_{1n} \left[\cos(\Omega t + \alpha) \cos(\Omega t) + \cos\left(\Omega t - \frac{2\pi}{3} + \alpha\right) \cos\left(\Omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\Omega t + \frac{2\pi}{3} + \alpha\right) \cos\left(\Omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ &= \frac{U_{1n} I_{1n}}{2} \left[\cos(2\Omega t + \alpha) + \cos\left(2\Omega t - \frac{4\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(2\Omega t + \frac{4\pi}{3} + \alpha\right) + 3 \cos \alpha \right] \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \cos\left(2\Omega t - \frac{4\pi}{3} + \alpha\right) &= \cos(2\Omega t + \alpha) \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin(2\Omega t + \alpha) \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= -\cos(2\Omega t + \alpha) \frac{1}{2} - \sin(2\Omega t + \alpha) \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Et, de même :

$$\cos\left(2\Omega t + \frac{4\pi}{3} + \alpha\right) = -\cos(2\Omega t + \alpha) \frac{1}{2} + \sin(2\Omega t + \alpha) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On en déduit donc que les trois termes en $2\Omega t$ se compensent dans l'expression de P_n qui **ne dépend donc pas du temps**.

$$P_n = \frac{3}{2} U_{1n} I_{1n} \cos \alpha$$

23. Les trois enroulements étant identiques, on calcule d'abord la puissance moyenne P_1 dissipée dans l'enroulement (1) :

$$\begin{aligned} P_1 &= \langle R_s i_1^2(t) \rangle \\ &= R_s I_{1n}^2 \langle \cos^2(\Omega t) \rangle \end{aligned}$$

La valeur moyenne de \cos^2 vaut $\frac{1}{2}$ donc $P_1 = \frac{1}{2} R_s I_{1n}^2$. On en déduit :

$$P_J = \frac{3}{2} R_s I_{1n}^2$$

L'énergie instantanée stockée dans l'inductance de l'enroulement (1) est $e_1(t) = \frac{1}{2} \Lambda_s i_1^2$ donc sa valeur moyenne est $E_1 = \frac{1}{4} \Lambda_s I_{1n}^2$.

Les trois enroulements sont identiques donc :

$$E_M = \frac{3}{4} \Lambda_s I_{1n}^2$$

24. Les applications numériques donnent :

$$\begin{aligned} P_n &= 900 \text{ MW} \\ P_J &= 7,0 \text{ MW} \\ E_M &= 4,0 \text{ MJ} \end{aligned}$$

La puissance électrique délivrée par la génératrice synchrone est de l'ordre de grandeur de celle d'une tranche de centrale nucléaire : la génératrice étudiée est destinée à cet usage.