

Khass 2023

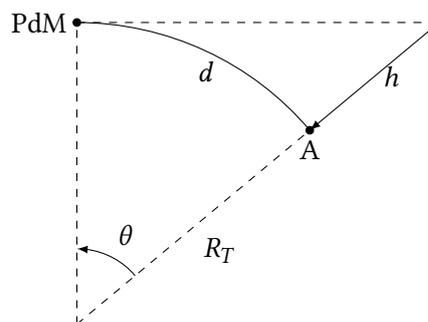
## Physique 2 – Éléments de correction

### Problème 1 – Les sylphes

D'après concours commun Mines-Ponts PC, Physique I, 2023

#### 1 Observation des sylphes

- D'après la figure 2, la majorité du spectre d'émission d'un sylphe est compris entre 600 et 800 nm, ce qui correspond bien à une couleur rouge. D'après la figure de droite, entre 80 et 90% de l'intensité lumineuse est absorbée par l'atmosphère sur cette plage de longueur d'onde quel que soit le taux d'humidité. Compte tenu de l'épaisseur (entre 40 et 80 km) que la lumière doit traverser, les sylphes sont difficilement observables depuis le sol.
- Le Pic du Midi de Bigorre est situé à 740 km de Chambéry par la route. La distance à vol d'oiseau la plus vraisemblable est donc  $d = 500 \text{ km}$ .
- La figure demandée est la suivante :



D'après cette figure, on a  $d = R_T \theta$  et  $\cos \theta = \frac{R_T}{R_T + h}$ . On en déduit :

$$\cos\left(\frac{d}{R_T}\right) = \frac{R_T}{R_T + h}$$

Comme  $d \ll R_T$ , on peut considérer que  $\theta$  est proche de 0 et réaliser un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos\left(\frac{d}{R_T}\right)} &= 1 + \frac{h}{R_T} \\ \frac{1}{1 - \frac{d^2}{2R_T^2}} &= 1 + \frac{h}{R_T} \\ 1 + \frac{d^2}{2R_T^2} &= 1 + \frac{h}{R_T} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$h = \frac{d^2}{2R_T}$$

L'application numérique donne  $h = 2 \times 10^4 \text{ m}$ .

- Les sylphes étant situés à une altitude supérieure à 40 km, il sont bien situés au-dessus de la ligne d'horizon et sont visibles en ligne directe. En revanche, le Mont-Blanc culmine à 4 810 m et se trouve sous la ligne d'horizon : il n'est pas visible du Pic du Midi, même par beau temps.

5. Sur le signal filtré dans le rouge, on observe un ensemble de pixels dont la valeur dépasse largement le seuil de détection de 30. L'observation lumineuse dans le visible correspond donc vraisemblablement à un sylphe.
6. On a immédiatement :

$$\vec{F} = -G \frac{mM_T}{(R_T + h_{ISS})^2} \vec{u}_r$$

et on en déduit le champ de gravitation :

$$\mathcal{G}_{ISS} = \frac{GM_T}{(R_T + h_{ISS})^2}$$

7. Au niveau de la surface de la Terre, on a :  $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$  donc :

$$\mathcal{G}_{ISS} = \frac{g_0 R_T^2}{(R_T + h_{ISS})^2} = g_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{h_{ISS}}{R_T}\right)^2}$$

Finalement, on obtient l'expression proposée dans l'énoncé :  $\mathcal{G}_{ISS} = g_0 \left(1 + \frac{h_{ISS}}{R_T}\right)^{-2}$ .

8. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. L'ISS est soumise à une seule force qui s'avère être centrale : son moment cinétique est conservé et  $(R_T + h_{ISS})^2 \dot{\theta} = C^{te}$ .

Comme la trajectoire est circulaire de rayon  $R_T + h_{ISS} = C^{te}$ , la vitesse de l'ISS  $v_{ISS} = (R_T + h_{ISS})\dot{\theta}$  est elle aussi **constante**.

On applique maintenant le théorème de la quantité de mouvement à l'ISS en projection sur  $\vec{u}_r$  :

$$-m \frac{v_{ISS}^2}{(R_T + h_{ISS})} = -m \mathcal{G}_{ISS}$$

$$v_{ISS}^2 = g_0 \frac{R_T^2}{R_T + h_{ISS}}$$

D'où :  $v_{ISS} = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + h_{ISS}}}$ .

L'application numérique donne  $v_{ISS} = 8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

9. La période est alors :

$$T = 2\pi \frac{R_T + h}{v_{ISS}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{(R_T + h)^3}{g_0 R_T^2}$$

On retrouve bien l'analogie à la troisième loi de Kepler :  $\frac{T^2}{(R_T + h)^3} = C^{te} = \frac{4\pi^2}{g_0 R_T^2}$ .

10. Les caméras de l'ISS couvrent une zone au sol de 25 km. Pendant la durée d'un sylphe (1 ms), l'ISS parcourt une distance de 800 m sur son orbite. On en déduit que le sylphe **reste bien dans le champ d'observation de la caméra** pendant toute sa durée de vie.
11. Dans un référentiel galiléen, la loi de la statique des fluides s'écrit :

$$\vec{0} = -\text{grad } P + \mu \vec{g}$$

12. D'après l'équation d'état du gaz parfait, on a  $\mu(z) = \frac{M}{RT_0} P(z)$ .

13. En projetant le principe de la statique des fluides sur l'axe vertical, on trouve :

$$0 = -\frac{dP}{dz} - \frac{M}{RT_0} P g_0 \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2}$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{Mg_0}{RT_0} P \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2}$$

On obtient bien la forme demandée avec  $H = \frac{RT_0}{Mg_0}$ .

L'application numérique donne :  $H = 8 \text{ km}$ .

14. En séparant les variables dans l'équation différentielle trouvée ci-dessus :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{1}{H} \frac{dz}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2}$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{R_T}{H} \left[ \frac{1}{1 + \frac{z}{R_T}} - 1 \right]$$

$$= -\frac{R_T}{H} \frac{\frac{z}{R_T}}{1 + \frac{z}{R_T}}$$

D'où :

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{R_T}{H} \frac{z}{R_T + z}\right)$$

Dans l'hypothèse  $z \ll R_T$ , on peut écrire  $R_T + z \simeq R_T$  donc :

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

15. En prenant le logarithme en base 10 de l'expression précédente, on trouve :

$$\log\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{1}{H \log(10)} z$$

D'après la figure 5 de l'énoncé, on lit :

$$\frac{1}{H \log(10)} = \frac{1}{20}$$

On retrouve donc bien  $H \simeq 8 \text{ km}$ .

16. La relation entre masse volumique et pression à l'altitude  $z$  s'écrit toujours  $\mu = \frac{MP}{RT}$ , même si la température n'est plus uniforme. Le raisonnement de la question 13 donne alors :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{Mg_0}{RT(z)} P \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2}$$

En remplaçant par la forme de la température donnée dans l'énoncé, on aboutit à l'équation demandée :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{Mg_0}{RT_0} P \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{\ell}\right) \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2}$$

17. On a  $\ell \ll R_T$  donc  $\varepsilon \ll 1$ . On en déduit  $2 + \varepsilon \simeq 2$  et  $1 + 2\varepsilon \simeq 1$ .

En utilisant cette simplification, on a bien  $\alpha \simeq 1$ , puis  $\beta \simeq 2\varepsilon$  et  $\gamma \simeq \frac{\varepsilon}{R_T}$ .

18. En séparant les variables dans l'équation de la question 15, on a :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{1}{H} \left[ \frac{dz}{1 - \frac{z}{\ell}} + \frac{2 + \frac{z}{R_T}}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2} \varepsilon dz \right]$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{\ell}{H} \ln\left(1 - \frac{z}{\ell}\right) - \frac{\varepsilon}{H} \int_0^z \frac{dz}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2} - \frac{\varepsilon}{H} \int_0^z \frac{1 + \frac{z}{R_T}}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2} dz$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{\ell}{H} \ln\left(1 - \frac{z}{\ell}\right) + R_T \frac{\varepsilon}{H} \left[ \frac{1}{1 + \frac{z}{R_T}} - 1 \right] - R_T \frac{\varepsilon}{H} \ln\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)$$

$$P(z) = P_0 \left( \frac{1 - \frac{z}{\ell}}{1 + \frac{z}{R_T}} \right)^{\ell/H} \exp\left(-\frac{\ell}{H} \frac{\frac{z}{R_T}}{1 + \frac{z}{R_T}}\right)$$

Par identification avec la forme proposée dans l'énoncé, on trouve :

$$\boxed{\xi = \frac{\ell}{H} \quad \chi = \frac{R_T H}{\ell}}$$

19. On a maintenant  $1 + \frac{z}{R_T} \simeq 1$  donc :

$$\boxed{P(z) = P_0 \left(1 - \frac{z}{\ell}\right)^{\xi} \exp\left(-\frac{z}{\chi}\right)}$$

20. Le modèle affine de la température n'est en réalité valable que sur les 20 premiers kilomètres de l'atmosphère.

21. Pour une observation depuis l'ISS, on s'intéresse aux altitudes comprises entre 40 et 400 km. La pression partielle en dioxygène y est alors au moins 100 fois plus faible qu'au niveau du sol : l'absorption linéique de la raie rouge par le dioxygène est 100 fois plus faible.

## 2 Formation avalancheuse de courant

22. S'il n'y a qu'une molécule dans la tranche d'épaisseur  $dx$  et de section  $\Sigma$ , la probabilité qu'un électron subisse une collision avec la molécule est  $p_1 = \frac{S_{\text{eff}}}{\Sigma}$ .

Avec une densité moléculaire  $n_{mo}$ , le nombre de molécules présentes dans le volume  $\Sigma dx$  est  $N_{mo} = n_{mo} \Sigma dx$ . La probabilité qu'un électron subisse une collision avec une de ces  $N_{mo}$  molécules devient :

$$p_N = n_{mo} \Sigma dx \frac{S_{\text{eff}}}{\Sigma}$$

D'après l'énoncé, la section efficace totale est définie par  $p_N = \frac{S_{mo}}{\Sigma}$ . L'égalité entre ces deux expressions donne :

$$\frac{S_{mo}}{\Sigma} = n_{mo} \Sigma dx \frac{S_{\text{eff}}}{\Sigma}$$

ou encore :

$$\boxed{S_{mo} = n_{mo} \Sigma dx S_{\text{eff}}}$$

23. Le bilan d'électrons est le suivant :

$$\text{Électrons en } (x + dx) = \text{Électrons en } (x) - \text{Électrons subissant une collision dans } \Sigma dx$$

En utilisant les notations de l'énoncé, ce bilan se traduit :

$$N(x + dx) = N(x) - N(x) \frac{S_{mo}}{\Sigma}$$

$$N(x + dif f x) - N(x) = -N(x) n_{mo} S_{eff} dx$$

$$\frac{dN}{dx} = -N(x) n_{mo} S_{eff}$$

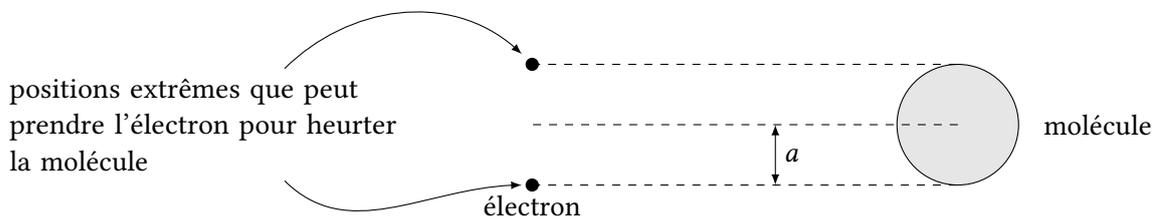
On aboutit à l'équation différentielle demandée :

$$\frac{dN}{dx} + n_{mo} S_{eff} N = 0 \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{1}{n_{mo} S_{eff}}$$

24. La solution de cette équation différentielle d'ordre 1, avec  $N(0) = N_0$  est :

$$N(x) = N_0 \exp(-n_{mo} S_{eff} x)$$

25. La situation est la suivante :



On en déduit donc :

$$S_{eff} = \pi a^2$$

26. On choisit  $a$  de l'ordre de  $1 \times 10^{-10}$  m et l'équation d'état des gaz parfaits permet d'exprimer  $n_{mo}$  :

$$P = n_{mo} k_B T$$

L'application numérique devient :

$$\ell_{pm} = \frac{1}{\frac{20}{1,4 \times 10^{-23} \times 260} \pi 1 \times 10^{-20}} = \frac{26 \times 1,4 \times 10^{-3}}{2\pi}$$

$$\ell_{pm} \simeq 5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

27. L'électron est soumis à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = -e\vec{E}$$

28. Notons  $\vec{u}_x$  le vecteur directeur de la force  $\vec{F}$ . Le travail élémentaire de la force de Lorentz est donc :

$$\delta W = eE dx$$

et le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$dE_c = eE dx$$

En intégrant cette expression sur la distance  $\ell_{pm}$  séparant deux collisions, on trouve :

$$\Delta E_c = eE \ell_{pm}$$

Avec la valeur du libre parcours moyen de la question 25, on trouve  $\Delta E_c = 0,5 \text{ eV}$ .

29. En supposant l'électron initialement au repos, son énergie cinétique est 32 fois plus petite que l'énergie d'ionisation : l'électron **ne peut pas** ioniser la molécule.
30. Calculons la vitesse de l'électron à partir de la définition de l'énergie cinétique de la mécanique non relativiste :

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

L'application numérique donne :

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19}}{1 \times 10^{-30}}} = \sqrt{3,2 \times 10^{17}} = \sqrt{32} \times 10^8$$

Or  $\sqrt{32} > 3$  donc l'électron cosmique **est nécessairement relativiste**.

31. L'électron primaire possède une énergie  $1 \text{ MeV} \gg \mathcal{E}_i$  et peut donc ioniser une première molécule de diazote. L'électron fils est produit lors de cette réaction avec une certaine énergie cinétique, que vient accroître le champ électrique local ; puis l'électron fils peut à son tour ioniser ; le processus se répète.

À chaque étape et tant que les électrons sont suffisamment énergétiques pour ioniser  $\text{N}_2$ , le nombre d'électrons double.

## Problème 2 — Oscillateurs et modes propres

D'après agrégation externe de physique, option chimie, 2023

### 1 Préliminaires — Oscillateurs harmoniques

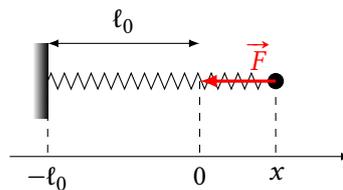
1. 1° loi de Newton : il existe au moins un référentiel, appelé référentiel galiléen, dans lequel le mouvement d'un point matériel isolé est rectiligne et uniforme.

2° loi de Newton : pour un point matériel de masse  $m$ , dans un référentiel galiléen  $\sum \vec{F} = m \vec{a}_{M/\mathcal{R}}$ .

3° loi de Newton :  $A$  et  $B$  étant deux points en interaction, la force  $\vec{F}_{A \rightarrow B}$  exercée par  $A$  sur  $B$  et la force  $\vec{F}_{B \rightarrow A}$  exercée par  $B$  sur  $A$  sont opposées et portées par la droite  $(AB)$  :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A} \quad \text{et} \quad \vec{F}_{A \rightarrow B} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$$

2. À l'équilibre, aucune force ne s'exerce sur  $M$  et la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide.



La force de rappel élastique est :

$$\vec{F} = -kx\vec{u}_x$$

3. On se place dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen. Les forces exercées sur  $M$  sont :

- son poids  $\vec{P}$ ,
- la réaction du support  $\vec{R}$ , verticale car on néglige les frottements,
- la force de rappel élastique  $\vec{F}$ .

La 2° loi de Newton en projection sur l'axe  $Ox$  donne immédiatement :

$$m\ddot{x} = -kx$$

Cette équation différentielle se met sous la forme canonique  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$  et on trouve la pulsation par identification :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

4. On cherche des solutions de la forme  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ . Les conditions initiales donnent :

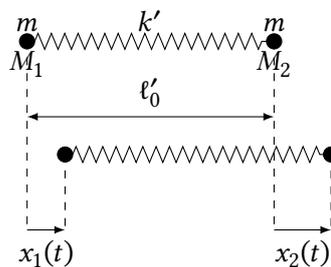
$$\begin{cases} x_0 = A \\ 0 = \omega_0 B \end{cases}$$

D'où la solution :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

## 2 Modes propres de deux oscillateurs mécaniques couplés

5. Notons  $\ell'_0$  la longueur à vide du ressort central, et comparons les positions des points  $M_1$  et  $M_2$  à l'équilibre et à un instant quelconque :



Sur cette figure, la longueur  $\ell'$  du ressort central est  $\ell' = \ell'_0 + x_2 - x_1$ . Or, la force exercée par ce ressort sur  $M_1$  est :

$$\begin{aligned} \vec{F}'_1 &= k'(\ell' - \ell'_0)\vec{u}_x \\ &= k'(x_2 - x_1)\vec{u}_x \end{aligned}$$

D'où le résultat demandé :

$$\vec{F}'_1 = -k'(x_1 - x_2)\vec{u}_x$$

6. La force  $\vec{F}'_2$  exercée sur  $M_2$  dépend, elle-aussi, de la longueur  $\ell'$  du ressort central. Cette force étant dirigée vers la gauche si  $\ell' > \ell'_0$ , on trouve :

$$\vec{F}'_2 = k'(x_1 - x_2)\vec{u}_x$$

7. On considère le point matériel  $M_1$  dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les forces exercées sur ce système sont :

- le poids et la réaction du support, dirigés selon  $\vec{u}_z$ ,
- la force de rappel élastique du ressort de gauche :  $-kx_1\vec{u}_x$ ,
- la force de rappel élastique du ressort de droite :  $-k'(x_1 - x_2)\vec{u}_x$ .

La 2<sup>e</sup> loi de Newton en projection sur  $\vec{u}_x$  donne alors :

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k'(x_1 - x_2)$$

$$\ddot{x}_1 + \frac{k+k'}{m}x_1 = \frac{k'}{m}x_2$$

Dans le même référentiel, le point matériel  $M_2$  est soumis :

- au poids et à la réaction du support, dirigés selon  $\vec{u}_z$ ,

- à la force de rappel du ressort de gauche :  $k'(x_1 - x_2)\vec{u}_x$ ,
- à la force de rappel élastique du ressort de droite :  $-kx_2\vec{u}_x$ .

La 2° loi de Newton donne alors :

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k'(x_1 - x_2)$$

$$\boxed{\ddot{x}_2 + \frac{k+k'}{m}x_2 = \frac{k'}{m}x_1}$$

8. La somme des deux équations trouvées à la question précédente donne :

$$\ddot{s} + \frac{k+k'}{m}s = \frac{k'}{m}s$$

d'où l'équation :

$$\boxed{\ddot{s} + \frac{k}{m}s = 0}$$

La différence entre les deux équations donne :

$$\ddot{d} + \frac{k+k'}{m}d = -\frac{k'}{m}d$$

d'où l'équation :

$$\boxed{\ddot{d} + \frac{k+2k'}{m}d = 0}$$

On remarque que ces deux équations sont des **équations harmoniques** de pulsations différentes  $\sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $\sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$ .

9. Pour respecter l'inégalité imposée par l'énoncé, on pose :

$$\boxed{\Omega_a = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}; \Omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Les solutions des deux équations harmoniques de la question précédente sont alors :

$$\boxed{\begin{cases} s(t) = A \cos(\Omega_s t) + B \sin(\Omega_s t) \\ d(t) = C \cos(\Omega_p t) + D \sin(\Omega_p t) \end{cases}}$$

10. Les conditions initiales fournies par l'énoncé deviennent :

$$\begin{cases} s(0) = 2x_0 & \dot{s}(0) = 2v_0 \\ d(0) = 0 & \dot{d}(0) = 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} 2x_0 = A & 2v_0 = \Omega_s B \\ 0 = C & 0 = \Omega_p D \end{cases}$$

Et finalement :

$$\boxed{\begin{cases} s(t) = 2x_0 \cos(\Omega_s t) + \frac{2v_0}{\Omega_s} \sin(\Omega_s t) \\ d(t) = 0 \end{cases}}$$

11. Les fonctions  $x_1$  et  $x_2$  sont respectivement calculées avec  $x_1 = \frac{s+d}{2}$  et  $x_2 = \frac{s-d}{2}$ , donc :

$$\boxed{\begin{cases} x_1(t) = x_0 \cos(\Omega_s t) + \frac{v_0}{\Omega_s} \sin(\Omega_s t) \\ x_2(t) = x_0 \cos(\Omega_s t) + \frac{v_0}{\Omega_s} \sin(\Omega_s t) \end{cases}}$$

Ce mode est appelé symétrique car les deux masses **oscillent en phase**.

12. Les déplacements initiaux de  $M_1$  et  $M_2$  étant identiques, le ressort central n'est initialement ni allongé ni étiré. Par la suite du mouvement, les deux masses oscillent en phase et le ressort central conserve sa longueur à vide : la force qu'il exerce sur  $M_1$  et  $M_2$  est identiquement nulle et n'intervient pas dans le mouvement. C'est pour cette raison que  $k'$  n'intervient pas dans la pulsation du mouvement.
13. Par analogie avec ce qui précède, on propose les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} x_1(0) = -x_2(0) = x_0 \\ \dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0) = v_0 \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} 0 = A & 0 = \Omega_s B \\ 2x_0 = C & 2v_0 = \Omega_a D \end{cases}$$

Donc  $s(t) = 0$  et  $d(t) = 2x_0 \cos(\Omega_a t) + \frac{2v_0}{\Omega_a} \sin(\Omega_a t)$ . Les mêmes combinaisons linéaires qu'à la question 11 donnent :

$$\begin{cases} x_1(t) = x_0 \cos(\Omega_a t) + \frac{v_0}{\Omega_a} \sin(\Omega_a t) \\ x_2(t) = -x_0 \cos(\Omega_a t) - \frac{v_0}{\Omega_a} \sin(\Omega_a t) \end{cases}$$

Les mouvements des deux masses sont toujours opposés : elles oscillent en **opposition de phase**.

14. D'après ce qui a été étudié aux questions 11 et 13, la figure 8 correspond au mode symétrique tandis que la figure 9 correspond au mode antisymétrique.
15. Commençons par la figure 8 :
- la tangente à l'origine est horizontale pour  $x_1$  et  $x_2$  donc la vitesse initiale est nulle,
  - les deux masses sont écartées initialement de 2 cm de leur position d'équilibre.

On en déduit :

$$x_1(0) = x_2(0) = 2 \text{ cm}; \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

Un raisonnement similaire pour la figure 9 donne :

$$x_1(0) = -x_2(0) = 2 \text{ cm}; \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

16. Pour le mode symétrique, on trouve graphiquement une période  $T_s = 2$  s, ce qui donne une pulsation  $\Omega_s = 3,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Pour le mode antisymétrique, on trouve une période  $T_a = 1,8$  s et donc une pulsation  $\Omega_a = 3,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

D'après la question 9, on a  $k = m\Omega_s^2$  donc  $k \simeq 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . Toujours d'après cette même question, on a  $k' = \frac{m\Omega_a^2 - k}{2}$  donc  $k' \simeq 0,1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .

17. On observe des **battements**.

18. En reprenant les formes générales des solutions pour  $s$  et  $d$  trouvées à la question 9, on a :

$$\begin{cases} s(0) = x_0 = A & \dot{s}(0) = 0 = \Omega_s B \\ d(0) = x_0 = A & \dot{d}(0) = 0 = \Omega_a D \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} s(t) = x_0 \cos(\Omega_s t) \\ d(t) = x_0 \cos(\Omega_a t) \end{cases}$$

Et finalement :

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{x_0}{2} (\cos(\Omega_s t) + \cos(\Omega_a t)) \\ x_2(t) = \frac{x_0}{2} (\cos(\Omega_s t) - \cos(\Omega_a t)) \end{cases}$$

19. En utilisant la formule de somme des cosinus  $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ , on trouve :

$$x_1(t) = x_0 \cos\left(\frac{\Omega_s + \Omega_a}{2}\right) \cos\left(\frac{\Omega_a - \Omega_s}{2}\right)$$

Par identification :

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{\Omega_s + \Omega_a}{2} \\ \omega_b &= \frac{\Omega_a - \Omega_s}{2} \end{aligned}}$$

20. Sur la figure 10, on relève  $T_b = 36$  s et  $T_0 = 1,9$  s.

**Remarque :**

La détermination de  $T_0$  est assez difficile car, sur  $x_2(t)$ , on ne sait pas si les instants  $t = 0$  et  $t = 18$  s correspondent à un passage par 0 ou à un minimum de l'onde moyenne. Il est préférable d'utiliser les passages par 0 en  $t = 10$  s et  $t = 26$  s pour 8,5 périodes de  $x_1$ .

On en déduit :

$$\begin{cases} \Omega_s + \Omega_a = \frac{4\pi}{1,9} \approx 2 \frac{30}{9} \approx 6,6 \\ \Omega_a - \Omega_s = \frac{4\pi}{36} = \frac{\pi}{9} \approx 0,33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_a \approx \frac{7}{2} \\ \Omega_s \approx \frac{6,3}{2} \end{cases}$$

D'où les valeurs approchées :  $\boxed{\Omega_a = 3,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$  et  $\boxed{\Omega_s = 3,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$ .

Ces résultats sont bien du même ordre de grandeur que ceux trouvés à la question 16. Le léger écart entre les valeurs provient de la difficulté de lecture de la période moyenne  $T_0$  sur la figure 10 ainsi que des approximations réalisées dans les calculs sans calculatrice.

### 3 Modes de vibration d'une chaîne d'atomes

21. Le  $n^{\text{e}}$  atome est soumis à deux forces de rappel élastique exercées par les ressorts de gauche et de droite. La longueur à vide des ressorts étant  $a$ , exprimons leur longueur à  $t$  quelconque en utilisant la figure 11 :

- pour le ressort de gauche  $\ell_g = a - u_{n-1} + u_n$ ,
- pour le ressort de droite  $\ell_d = a - u_n + u_{n+1}$ .

Les deux forces exercées sur la  $n^{\text{e}}$  masse sont alors :

- $\vec{F}_g = -\beta(u_n - u_{n-1})\vec{u}_x$ ,
- $\vec{F}_d = \beta(u_{n+1} - u_n)\vec{u}_x$ .

La 2<sup>o</sup> loi de Newton appliquée à la  $n^{\text{e}}$  masse dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen et en projection sur  $\vec{u}_x$  donne :

$$\boxed{m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \beta(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)}$$

22. Pour que l'expression dans l'exponentielle soit sans dimension, il est nécessaire que  $k$  soit **l'inverse d'une longueur**.

23. On cherche à avoir :

$$\begin{aligned} Ae^{i(kx_n - \omega t)} &= Ae^{i(kx_p - \omega t)} \\ e^{ikx_n} &= e^{ikx_p} \end{aligned}$$

Cette égalité est vérifiée pour  $kx_p \equiv kx_n[2\pi]$ .

La longueur d'onde correspond au plus petit écart non nul entre  $x_p$  et  $x_n$ , c'est-à-dire :  $kx_p = kx_n + 2\pi$ . On en déduit :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

24. L'équation différentielle de la question 21 devient :

$$\begin{aligned} m(-i\omega)^2 A e^{i(kna - \omega t)} &= \beta A e^{i(kna - \omega t)} (e^{ika} + e^{-ika} - 2) \\ -m\omega^2 &= \beta(2 \cos(ka) - 2) \\ -m\omega^2 &= -4\beta \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \end{aligned}$$

On obtient bien la relation demandée :

$$\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{\omega^2 m}{4\beta}$$

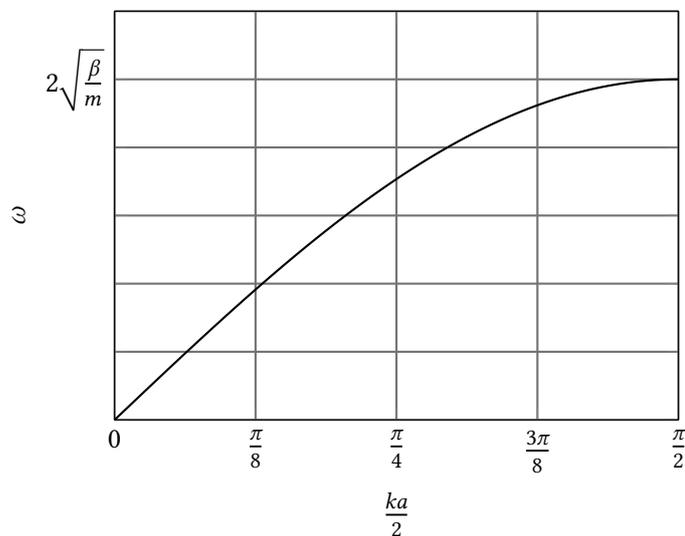
25. La fonction sinus carré est  $\pi$ -périodique. Les valeurs  $\frac{ka}{2}$  et  $\pi + \frac{ka}{2}$  correspondent à la même pulsation  $\omega$  : on peut déjà limiter l'étude de la relation de dispersion sur l'intervalle  $\frac{ka}{2} \in [0; \pi]$ .

De plus, la fonction est symétrique par rapport à  $\frac{\pi}{2}$ . Ainsi, les valeurs  $\frac{ka}{2}$  et  $\pi - \frac{ka}{2}$  correspondent également à la même pulsation : on réduit l'étude à l'intervalle  $\frac{ka}{2} \in [0; \frac{\pi}{2}]$ .

On se limite donc à l'étude de la relation de dispersion sur l'intervalle  $ka \in [0; \pi]$ .

On a  $\frac{m\omega^2}{4\beta} > 0$  et  $\sin\left(\frac{ka}{2}\right) > 0$  sur l'intervalle d'étude. En prenant la racine de la relation de dispersion, on obtient :

$$\sin\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{m}{\beta}}$$



26. Comme  $\sin\left(\frac{ka}{2}\right) \leq 1$ , on doit avoir  $\frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{m}{\beta}} \leq 1$ . On en déduit la pulsation maximale permettant de vérifier cette égalité :

$$\omega_M = 2\sqrt{\frac{\beta}{m}}$$

27. À cette pulsation, on a  $\frac{ka}{2} = \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire  $\lambda = 2a$  : la distance entre deux masses successives correspond à une demi-longueur d'onde et deux masses successives oscillent en **opposition de phase** (mode antisymétrique).

En reprenant l'expression de  $\underline{u}_{n+1}$  :

$$\underline{u}_{n+1} = Ae^{i(kna+ka-\omega t)} = Ae^{i(kna-\omega t)}e^{i\pi} = -\underline{u}_n$$

28. On a  $a \ll \lambda$ , donc  $ka \ll k\lambda$ . On en déduit :

$$\boxed{ka \ll 2\pi}$$

29. D'après la formule du développement de Taylor, on a :

$$\begin{cases} u(x+a, t) = u(x, t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) \\ u(x-a, t) = u(x, t) - a \frac{\partial u}{\partial x}(x) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) \end{cases}$$

30. Dans l'approximation des milieux continus, l'équation de la question 21 devient :

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta [u(x+a, t) + u(x-a, t) - 2u(x, t)]$$

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta \left[ u(x, t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) + u(x, t) - a \frac{\partial u}{\partial x}(x) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) - 2u(x, t) \right]$$

D'où l'équation :

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

En mettant cette équation sous la forme proposée par l'énoncé, on trouve :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{m}{\beta a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$

Par identification, on a :

$$\boxed{V = a \sqrt{\frac{\beta}{m}}}$$

V est homogène à une **vitesse** et sa dimension est  $L \cdot T^{-1}$ .

31. L'application numérique pour la vitesse donne :  $V \simeq 1 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

On trouve également  $\omega_M$  de l'ordre de  $\omega_M \simeq 5 \times 10^{13} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  donc  $f_M \simeq 1 \times 10^{13} \text{ Hz} = 1 \times 10^1 \text{ THz}$ .

Cela ne correspond pas du tout au domaine audible.