

Khass 2023

Physique 2

Calculatrice interdite – Documents interdits

- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.
- Le sujet est composé de deux problèmes indépendants et comporte 11 pages. Assurez-vous que le sujet est complet avant de commencer à composer.

Problème 1 – Les sylphes

D'après concours commun Mines-Ponts PC, Physique I, 2023

Un formulaire et des données numériques sont fournis à la fin du problème. Toutes les applications numériques seront effectuées avec 1 chiffre significatif.

Les sylphes sont des émissions lumineuses rouge, très intenses et relativement brèves (de l'ordre de quelques centaines de millisecondes) qui se produisent entre le sommet des nuages et l'ionosphère. La majorité d'entre elles se situe entre 40 et 80 km d'altitude. Elles ne sont observées et étudiées que depuis 1990 environ. Certaines de leurs manifestations avaient déjà été rapportées bien avant mais leur observation depuis la Terre est difficile. Les sylphes font partie d'un groupe d'émissions lumineuses qui se produisent au moment des orages et qui compte aussi les jets bleus et les elfes (voir la figure 1). Ces émissions sont la conséquence de courants électriques importants qui se produisent lors d'une avalanche de créations d'ions et d'électrons. L'initiateur de l'avalanche peut être une particule du rayonnement cosmique. Lors de chocs avec les molécules, les électrons des courants électriques apportent de l'énergie à celles-ci qui la perdent ensuite en émettant de la lumière visible.

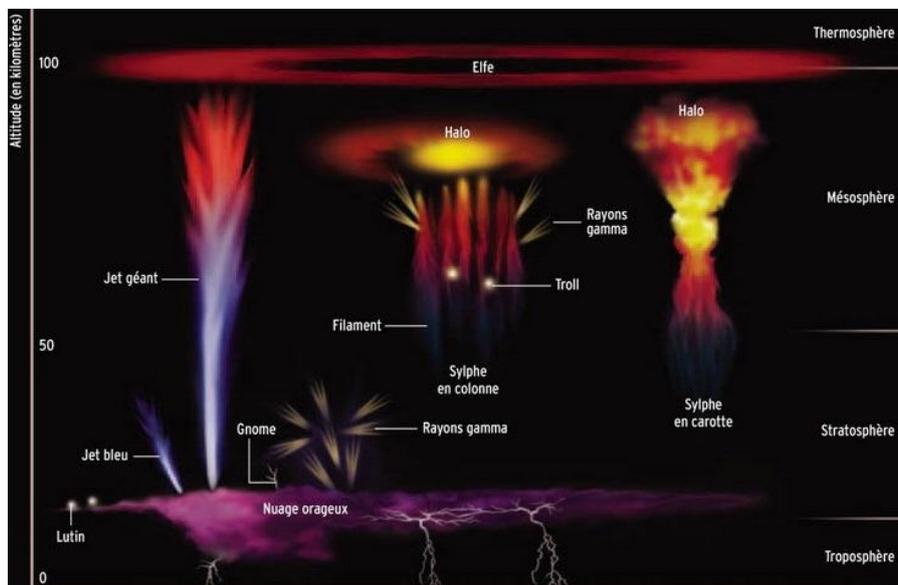


FIG. 1 : Différentes formes de phénomènes lumineux éphémères atmosphériques.

1 Observation des sylphes

1. À l'aide des courbes de la figure 2, justifier la couleur caractéristique des sylphes. Justifier également leur observation difficile depuis la surface de la Terre.

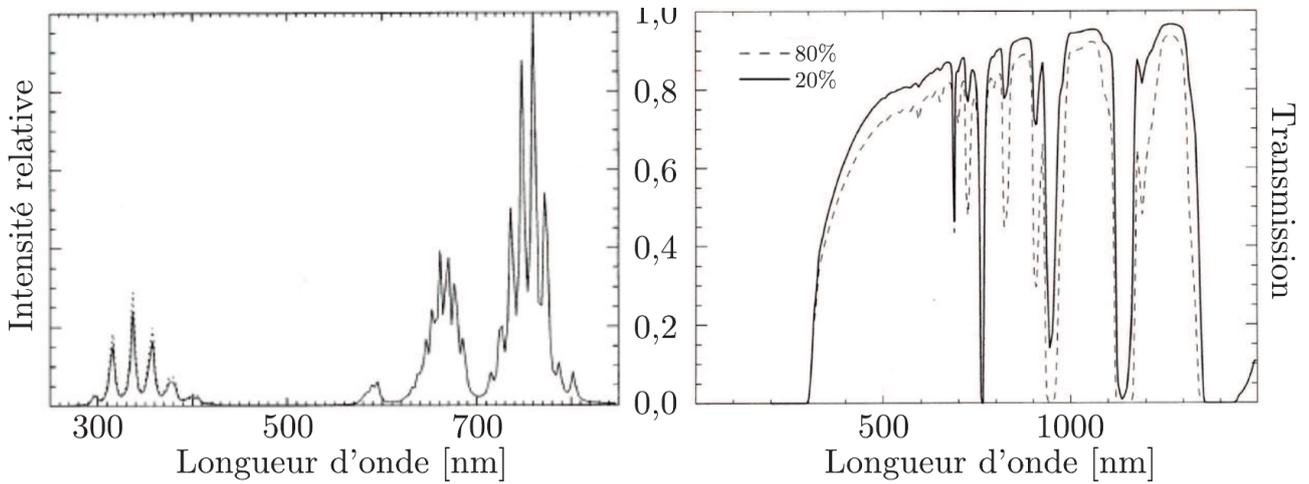


FIG. 2 : À gauche : spectre d'émission d'un sylphe. À droite : coefficient de transmission de l'atmosphère avec des taux d'humidité de 20% et 80%.

Malgré cette difficulté, des images de sylphes ont été obtenues comme celle de la figure 3 qui a été prise depuis l'Observatoire du Pic du Midi de Bigorre. Des sylphes y ont été vus au-dessus des Alpes. Le Pic du Midi de Bigorre se situe au milieu de la chaîne des Pyrénées qui s'étend de Perpignan à l'est jusqu'à Biarritz à l'ouest, séparant la France de l'Espagne.



FIG. 3 : Photographie d'un sylphe au-dessus des Alpes prise depuis l'observatoire du Pic du Midi.

Du fait de la rotondité de la Terre de rayon R_T , on s'interroge sur la possibilité de vision de sylphes au-dessus des Alpes.

2. La distance d qui sépare à vol d'oiseau le Pic du Midi de Bigorre de la chaîne des Alpes françaises est-elle de l'ordre de 500, 1000 ou 1 500 km ?
3. Sans prendre en compte l'altitude du Pic du Midi de Bigorre, tracer sur un schéma approprié la ligne d'horizon qui en part et passe au-dessus des Alpes à une altitude h . En faisant les hypothèses qui s'imposent, exprimer h en fonction de R_T et d et calculer sa valeur numérique.
4. Est-il possible de voir des sylphes alpins depuis le Pic du Midi de Bigorre ? Peut-on voir le Mont-Blanc par beau temps ?

Afin de pouvoir observer régulièrement des sylphes et de développer des recherches visant à mieux comprendre leur origine, on utilise depuis 2001 sur la station spatiale internationale (ISS), deux micro-caméras fixées sur un hublot. Les deux caméras observent selon la verticale. L'une de ces deux caméras opère dans le visible tandis que l'autre est équipée d'un filtre de très faible bande passante centré à 761 nm. Sur la figure 4, on peut observer les deux images obtenues lors d'un enregistrement. Cet enregistrement a été réalisé lors d'un orage important.

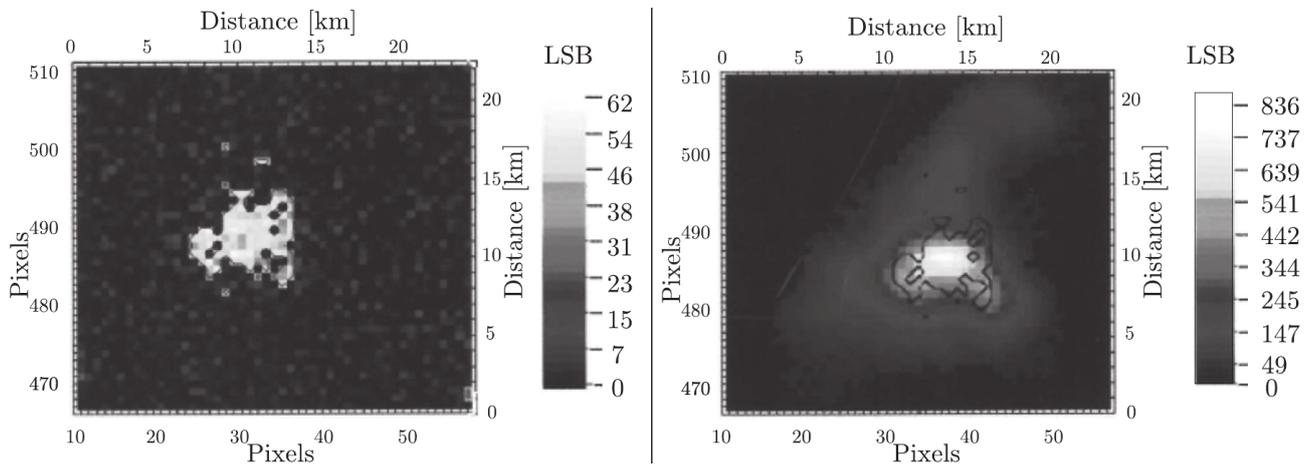


FIG. 4 : Enregistrements effectués depuis l'ISS par la micro-caméra filtrée (à gauche) et par la micro-caméra dans le visible (à droite). Un trait noir isole la détection d'un sylvph sur l'image de droite.

Sur ces images, l'intensité lumineuse obtenue est exprimée en LSB (Lower Significant Bit : unité de mesure spécifique de la caméra). On indique qu'un éclair traditionnel provoque un niveau de 836 LSB sur la caméra opérant dans le visible et donne 30 LSB sur la caméra filtrée.

5. Montrer que l'analyse des deux images de la figure 4 prouve bien la détection d'un sylvph.
6. Rappeler l'expression de la force gravitationnelle exercée par la Terre, de masse M_T sur l'ISS, de masse m et située à une altitude h_{ISS} d'environ 400 km. En déduire l'expression de la norme du champ gravitationnel \mathcal{G}_{ISS} de la Terre au niveau de l'ISS, défini par $\vec{F} = m\vec{\mathcal{G}}_{ISS}$.
7. Montrer que ce champ gravitationnel est de la forme :

$$\mathcal{G}_{ISS} = g_0 \left(1 + \frac{h_{ISS}}{R_T} \right)^{-2}$$

où $g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ est le champ de gravitation à la surface de la Terre.

8. Après avoir montré qu'elle est constante, déterminer l'expression v_{ISS} de la norme de la vitesse de l'ISS sur son orbite circulaire en fonction de g_0 , R_T et h_{ISS} . Calculer sa valeur numérique en $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$.
9. Déterminer l'expression de la période de révolution T_{ISS} de l'ISS autour de la Terre et faire le lien avec la troisième loi de Kepler.
10. Les deux micro-caméras de l'ISS ont pour objectif d'enregistrer, lors d'un passage au-dessus d'un orage, la totalité de l'évolution d'un sylvph. Commenter la possibilité et la précision de ces enregistrements. On justifiera les réponses de façon numérique.

Il est difficile d'observer des sylphes depuis la Terre dans le visible, car le dioxygène O_2 présent dans l'atmosphère absorbe fortement à 762 nm. Toutefois, le dioxygène se raréfie rapidement avec l'altitude, ce qui permet des observations au-delà de 40 km d'altitude comme cela est le cas avec l'ISS. Nous allons étudier l'évolution de la pression partielle $P_{\text{O}_2}(z)$ de dioxygène en fonction de l'altitude z . Le modèle que nous utilisons est le suivant :

- L'atmosphère est assimilée à un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.
- La fraction molaire de dioxygène O_2 est supposée la même à toute altitude z et égale à $x_{\text{O}_2} = 20\%$.
- L'atmosphère est supposée en équilibre de telle sorte que la loi de la statique des fluides s'y applique et on ne prendra en compte que le poids assimilé à la force gravitationnelle.
- La pression et la température à la surface de la Terre sont respectivement $P_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$ et $T_0 = 290 \text{ K}$ en $z = 0$.

On considère dans un premier temps que la température de l'atmosphère est uniforme et de valeur T_0 .

11. Rappeler l'expression vectorielle de la loi de la statique d'un fluide de masse volumique μ et soumis à la

seule force de gravitation.

12. Quelle est la relation entre la masse volumique $\mu(z)$ de l'atmosphère et sa pression $P(z)$ à l'altitude z ?
 13. Montrer que la pression atmosphérique $P(z)$ obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dP}{dz} = -F(z)\frac{P}{H} \quad \text{avec} \quad F(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2}$$

où H est une distance caractéristique que l'on exprimera en fonction de g_0, R, T_0 et M . Évaluer numériquement H en kilomètres.

14. Déterminer la pression $P(z)$ dans l'atmosphère. Simplifier cette expression pour $z \ll R_T$.

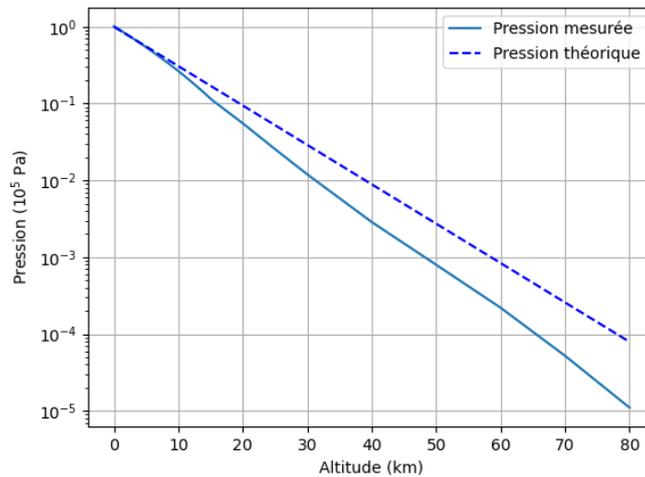


FIG. 5 : Évolution de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude.

La figure 5 présente l'évolution de la pression atmosphérique mesurée en fonction de l'altitude (trait plein) ainsi que la pression déterminée à la question 14 (tirets).

15. Retrouver sur cette figure la valeur numérique de la constante H suivant le modèle développé dans la question précédente. On utilisera la valeur numérique approchée $\log(10) \simeq 2,3$.

On constate, sur la figure 5, que l'écart entre le modèle et les mesures augmente avec l'altitude à cause de la non prise en compte de la variation de température dans l'atmosphère.

On considère maintenant que la température dans l'atmosphère suit la loi suivante :

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{z}{\ell}\right)$$

avec $\ell = 50$ km, ce qui limitera le modèle à des altitudes inférieures à ℓ .

16. Montrer que la pression atmosphérique $P(z)$ obéit alors à l'équation différentielle :

$$\frac{dP}{dz} = -F(z)\frac{P}{H} \quad \text{avec} \quad F(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{\ell}\right)\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2}$$

où H est la même constante que dans la question 13.

En décomposant la fonction F , on peut écrire :

$$F(z) = \frac{\alpha}{1 - \frac{z}{\ell}} + \frac{\beta + \gamma z}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{1 + \ell(2 + \epsilon)} \\ \beta = \alpha\ell(2 + \epsilon) \\ \gamma = \alpha\frac{\epsilon}{R_T} \\ \epsilon = \frac{\ell}{R_T} \end{cases}$$

17. Montrer que, dans les conditions du problème, on peut prendre $\alpha \approx 1$, $\beta \approx 2\varepsilon$ et $\gamma \approx \frac{\varepsilon}{R_T}$.

18. Montrer que la pression $P(z)$ dans l'atmosphère est alors donnée par :

$$P(z) = P_0 \left(\frac{1 - \frac{z}{\ell}}{1 + \frac{z}{R_T}} \right)^\xi \exp \left(-\frac{z}{\chi \left(1 + \frac{z}{R_T} \right)} \right) \quad (1)$$

dans laquelle on précisera l'expression des quantités ξ et χ en fonction de ℓ , H et R_T .

19. Proposer une expression simplifiée avec $z \ll R_T$.

Sur la figure 6 ci-dessous, on a représenté sur le même schéma d'une part le modèle de pression de l'équation 1 pour les valeurs adaptées des paramètres et d'autre part la valeur de la pression mesurées par des sondes atmosphériques et spatiales.

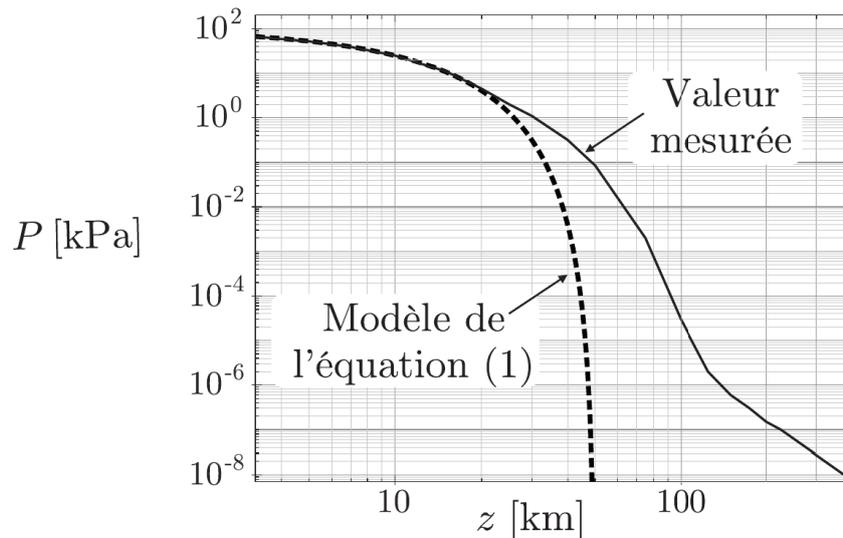


FIG. 6 : Évolution de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude.

20. Pour quelle raison principale le modèle étudié cesse-t-il d'être correct à partir d'une altitude de l'ordre de $z = 20$ km alors qu'il est censé fonctionner potentiellement jusqu'à 50 km ?

21. Discuter la possibilité d'observation des sylphes en lien avec la pression partielle de dioxygène depuis l'ISS.

2 Formation avalancheuse de courant

L'origine des sylphes est toujours discutée à l'heure actuelle. Un modèle repose sur la formation d'un courant lié à des ionisations en cascade, provoquées par un électron primaire capable d'ioniser par chocs successifs des molécules de l'atmosphère, principalement du diazote N_2 .

Les électrons fils créés par l'électron primaire peuvent à leur tour provoquer de nouvelles ionisations, d'où l'effet d'avalanche. Cet électron primaire peut provenir du rayonnement cosmique qui éclaire en permanence la Terre. Nous allons tout d'abord étudier la possibilité pour un tel électron de provoquer l'ionisation d'une molécule de diazote.

On considère un modèle unidimensionnel d'axe Ox où N_0 électrons se déplacent de façon homogène dans le sens x croissant. Ces électrons sont répartis aléatoirement dans une section donnée Σ . Leur déplacement s'effectue dans un milieu peu dense où la densité volumique de molécules est n_{mo} . On s'intéresse à la distance moyenne $\langle x \rangle$ qu'ils vont parcourir avant de subir un choc avec une molécule. Cette distance porte le nom de libre parcours moyen : $\ell_{pm} = \langle x \rangle$.

On appelle $N(x) < N_0$ le nombre d'électrons qui ont atteint l'abscisse x sans subir de choc depuis $x = 0$. La probabilité qu'un électron subisse un choc entre les abscisses x et $x + dx$ est le rapport de la section efficace totale S_{mo} associée à l'ensemble des molécules présentes entre x et $x + dx$ et de la section Σ . Pour une unique

molécule, la section efficace S_{eff} traduit le fait que si l'électron arrive sur cette surface, le choc se produit et s'il passe à côté, il n'y a pas de choc.

22. Exprimer S_{m_0} en fonction de S_{eff} , n_{m_0} , Σ et dx .

23. Après avoir exprimé le nombre d'électrons $N(x + dx)$ en fonction de $N(x)$, montrer que le nombre d'électrons à l'abscisse x vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dN}{dx} + \frac{N}{\delta} = 0$$

où δ est une constante homogène à une longueur que l'on exprimera en fonction de n_{m_0} et de S_{eff} .

24. Résoudre cette équation et exprimer $N(x)$ en fonction de N_0 , n_{m_0} , S_{eff} et x .

On admettra pour la suite que le libre parcours moyen est égal à la distance δ : $\ell_{pm} = \delta$.

25. En négligeant le rayon des électrons devant la dimension moyenne a d'une molécule, donner l'expression de la section efficace S_{eff} .

26. En proposant un ordre de grandeur raisonnable de , donner la valeur numérique du libre parcours moyen ℓ_{pm} pour un électron à l'altitude $z = 60$ km où la pression est $P = 20$ Pa et la température $T = 260$ K.

Au niveau des sylphes, il existe un champ électrique quasi-uniforme qui a pour principale origine les charges présentes à la surface des nuages d'une part et celles présentes à la limite entre la mésosphère et l'ionosphère vers 100 km d'altitude. Son intensité est $E = 100 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

27. Rappeler l'expression de la force subie par un électron plongé dans le champ électrique uniforme \vec{E} .

28. En déduire l'énergie cinétique gagnée par un électron entre deux collisions. On donnera la valeur numérique de ce gain en eV.

29. Sachant que l'énergie d'ionisation de la molécule de diazote est $\mathcal{E}_i = 16$ eV, un électron initialement au repos et accéléré par le champ électrique E peut-il ioniser cette molécule ?

On soupçonne fortement des électrons cosmiques relativistes possédant une énergie cinétique de 1 MeV d'être à l'origine de la cascade avalancheuse.

30. Justifier le fait que ces électrons cosmiques sont nécessairement relativistes.

31. Expliquer qualitativement le phénomène de cascade avalancheuse.

Données numériques

Constante molaire des gaz parfaits	$R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Newton de la gravitation	$G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Champ de pesanteur à la surface de la Terre	$g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6,4 \times 10^3 \text{ km}$

FIN DU PREMIER PROBLÈME

Problème 2 — Oscillateurs et modes propres

D'après agrégation externe de physique, option chimie, 2023

1 Préliminaires — Oscillateur harmonique

1. Énoncer les trois lois du mouvement de Newton de la mécanique.

On étudie le mouvement d'une masse ponctuelle m située au point M , attachée à un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est attachée en un point O à un support fixe du référentiel terrestre supposé galiléen. La masse m est assujettie à se déplacer sans aucun frottement le long d'un axe horizontal Ox , dans ce référentiel. On appelle ℓ_0 la longueur à vide du ressort et on choisit l'origine des x de telle sorte que $x = 0$ à la position d'équilibre de la masse.

2. Faire un schéma de la situation en faisant apparaître clairement la variable x et la grandeur ℓ_0 . Expliciter alors la force de rappel du ressort (norme, direction et sens) à l'aide des grandeurs précédentes.
3. Établir l'équation du mouvement de la masse. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 de cet oscillateur harmonique.
4. On choisit les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Expliciter la solution $x(t)$.

2 Modes propres de deux oscillateurs mécaniques couplés

On étudie maintenant le système suivant, représenté figure 7. Deux masses ponctuelles identiques M_1 et M_2 , de masse $m = 100$ g, sont reliées d'un côté à deux parois fixes par deux ressorts identiques de raideur k et entre elles par un ressort de couplage de raideur k' . L'axe Ox est horizontal et la distance entre les parois fixes est telle qu'à l'équilibre les ressorts ont une longueur correspondant à leur longueur à vide. Les masses sont assujetties à glisser sans frottement le long de l'axe Ox . On note $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les déplacements des masses par rapport à leur position d'équilibre.

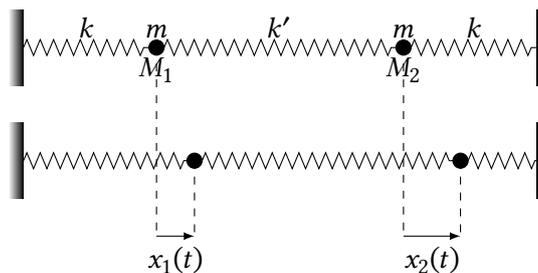


FIG. 7

5. Montrer que la force exercée par le ressort de raideur k' sur la masse M_1 s'écrit :

$$\vec{F}'_1 = -k'(x_1 - x_2)\vec{u}_x$$

6. Écrire de même, en la justifiant, l'expression de la force \vec{F}'_2 exercée par le ressort de raideur k' sur M_2 .
7. Montrer que les déplacements $x_1(t)$ et $x_2(t)$ qui décrivent le mouvement des masses sont solutions du système d'équations couplées :

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{k+k'}{m}x_1 = \frac{k'}{m}x_2 \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{k+k'}{m}x_2 = \frac{k'}{m}x_1 \end{cases}$$

8. On effectue le changement de variables : $s = x_1 + x_2$ et $d = x_1 - x_2$. Écrire les deux équations différentielles satisfaites par s et d . Commenter.
9. Donner la forme générale des solutions en (s, d) . On fera en particulier apparaître deux pulsations caractéristiques Ω_s et Ω_a avec $\Omega_a > \Omega_s$ dont on donnera les expressions en fonction de m, k et k' . On ne cherchera pas à exprimer les constantes d'intégration figurant dans les expressions de $s(t)$ et $d(t)$.

Ω_s et Ω_a sont appelées **pulsations propres** du système de deux oscillateurs couplés.

10. On choisit les conditions initiales suivantes : $x_1(0) = x_2(0) = x_0$ et $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = v_0$. Expliciter $s(t)$ et $d(t)$.
11. En déduire $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Commenter le nom de **mode symétrique** correspondant à ce mouvement. Décrire qualitativement le mouvement des deux masses. On pourra illustrer le propos en représentant les évolutions temporelles de x_1 et de x_2
12. Commenter le fait que Ω_s ne dépende pas de k' .
13. Proposer des conditions initiales permettant d'exciter uniquement le mode de pulsation propre Ω_a , appelé **mode antisymétrique**. Donner les évolutions temporelles de x_1 et x_2 dans ce mode.

Les figures 8 et 9 représentent les chronogrammes des positions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour chacun des deux modes étudiés ci-dessus.

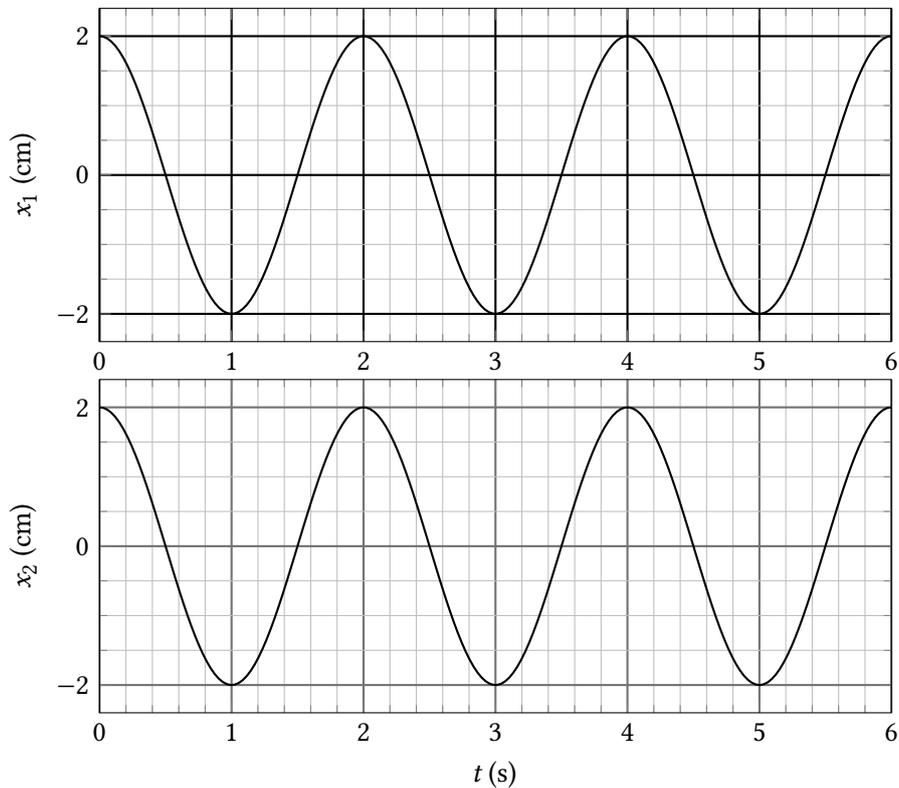


FIG. 8

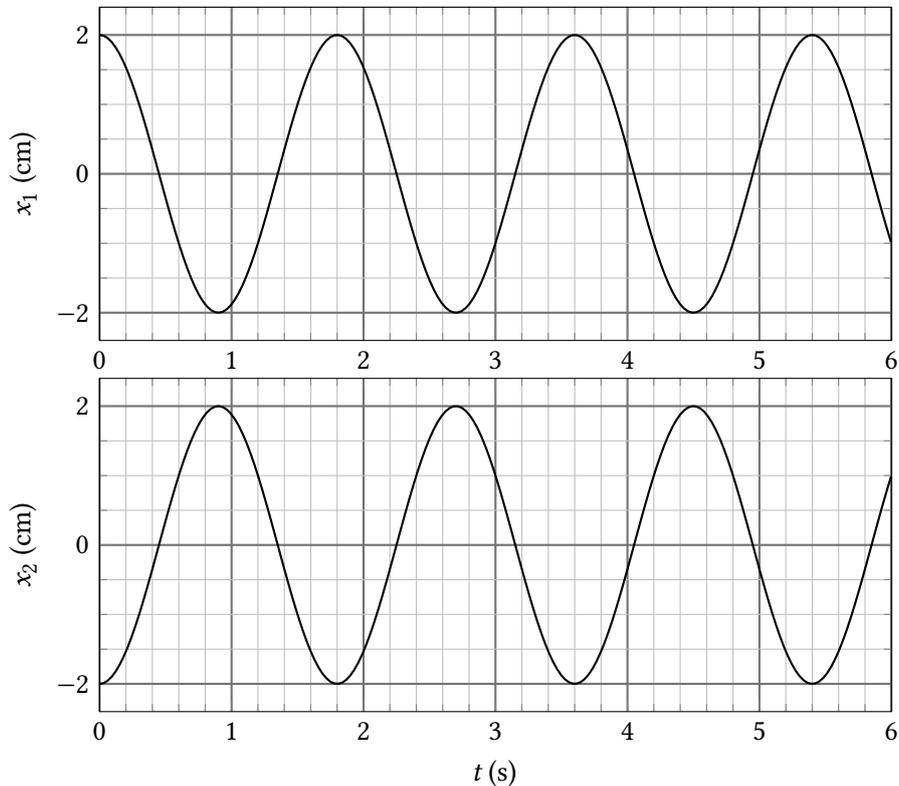


FIG. 9

14. À quel mode correspond chacune des figures ?
15. Déterminer entièrement les conditions initiales correspondant à chaque figure.
16. Calculer les valeurs numériques des pulsations Ω_s et Ω_a . On donnera le résultat approché à deux chiffres significatifs. En déduire les valeurs approchées à un chiffre significatif des constantes de raideur k et k' .

Les évolutions temporelles de la figure 10 donnent x_1 et x_2 pour les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} x_1(0) = x_0 = 2 \text{ cm} \\ \dot{x}_1(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$$

17. Comment s'appelle le phénomène caractérisé par ce type d'évolution temporelle ?
18. Exprimer $x_1(t)$ et $x_2(t)$ avec les conditions initiales fournies.
19. Mettre la fonction $x_1(t)$ sous la forme :

$$x_1(t) = A \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_b t)$$

où ω_0 (resp. ω_b) est la pulsation moyenne (resp. pulsation de battement). Exprimer ces deux pulsations en fonction de Ω_a et Ω_s .

20. Retrouver les valeurs numériques des deux pulsations propres à l'aide de la figure 10. On explicitera clairement la démarche utilisée. Commenter les résultats obtenus.

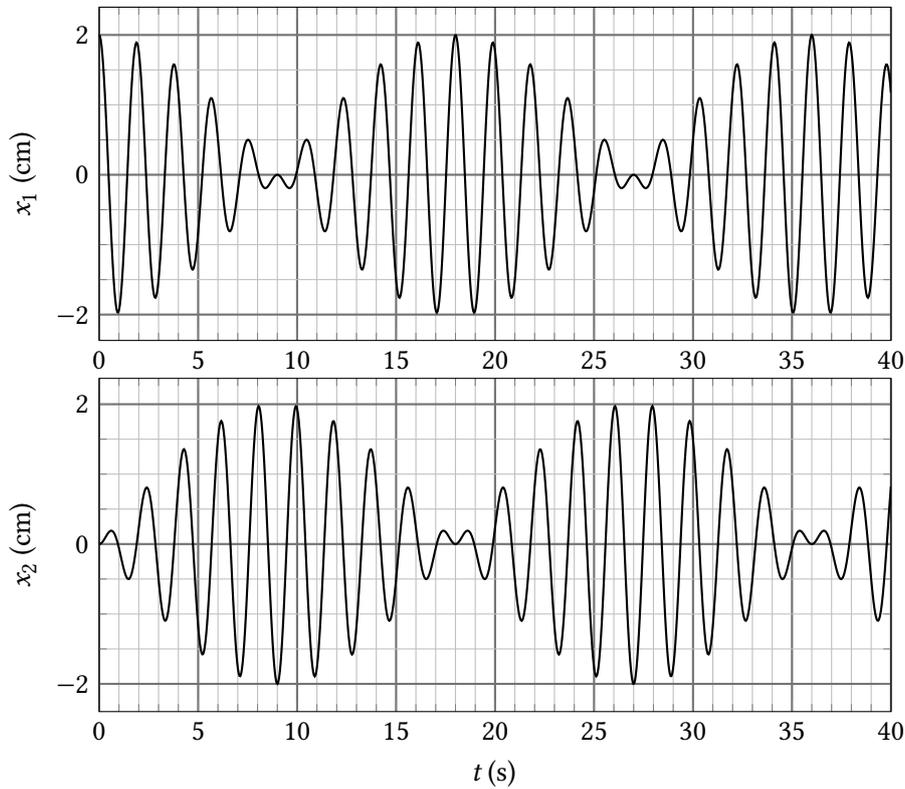


FIG. 10

3 Modes de vibration d'une chaîne d'atomes

Dans cette partie, on envisage une chaîne unidimensionnelle infinie de masses reliées par des ressorts. Cette modélisation simplifiée permet de décrire la propagation des ondes acoustiques dans les solides : les masses représentent les atomes et les ressorts représentent les liaisons inter-atomiques.

On exploite dans ce qui suit un modèle simplifié, à 1 dimension : on représente le solide cristallin par une chaîne linéaire d'atomes identiques de masse m , alignés sur l'axe Ox . À l'équilibre, ils sont séparés par une distance a et l'atome n se trouve à l'abscisse $x_n = na$.

Une perturbation longitudinale se propageant selon l'axe Ox modifie la position des atomes, l'atome n étant déplacé, à t , d'une quantité $u_n(t)$ telle que $|u_n| \ll a$ (voir figure 11). On suppose que dans la chaîne unidimensionnelle, l'atome n subit uniquement l'action de ses deux plus proches voisins, les atomes $(n - 1)$ et $(n + 1)$. Si les déplacements sont de faible amplitude, on peut modéliser l'interaction entre deux atomes voisins par une force de rappel élastique correspondant à un ressort de raideur β .

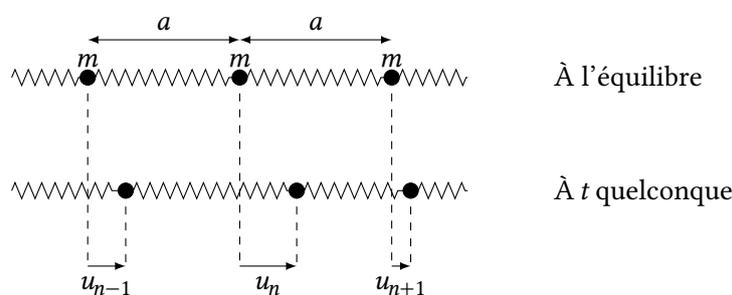


FIG. 11

21. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au n^e atome, trouver l'équation différentielle couplée reliant u_{n-1} , u_n et u_{n+1} .

Une onde acoustique monochromatique de pulsation ω se propage le long de la chaîne en induisant un

déplacement du n^{e} atome sous la forme :

$$\underline{u}_n = Ae^{i(kx_n - \omega t)}$$

où A est une constante indépendante de n et t .

22. Quelle est la dimension de la constante k , appelée **module d'onde** ?

23. Quelle est la valeur du produit kx_p telle que $\underline{u}_n = \underline{u}_p$? En déduire l'expression de la longueur d'onde λ en fonction de k .

24. En injectant les expressions de \underline{u}_{n-1} , \underline{u}_n et \underline{u}_{n+1} dans l'équation de la question 21, établir une relation entre k et ω . Montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{\omega^2}{4} \frac{m}{\beta}$$

Cette relation est appelée **relation de dispersion**.

25. Justifier qu'on peut se limiter à l'étude de la relation de dispersion pour $ka \in [0; \pi]$. Simplifier la relation de dispersion sur cet intervalle. Tracer le graphe donnant ω en fonction de ka sur cet intervalle.

26. Montrer qu'il existe une pulsation maximale ω_M des ondes pouvant se propager dans la chaîne d'oscillateurs.

27. Préciser la relation existant entre u_{n+1} et u_n pour $\omega = \omega_M$. Décrire alors le mouvement relatif des atomes.

On se place maintenant dans l'approximation des milieux continus, dans laquelle la distance entre atomes a est très petite devant la longueur d'onde λ des ondes élastiques étudiées.

28. Comment cette approximation se traduit-elle sur la valeur de la variable adimensionnée ka ?

Dans cette approximation, le déplacement u_n de l'atome n , situé en $x = na$ au repos, peut être remplacé par une fonction continue $u(x, t)$ où la variable x représente la position de cet atome au repos.

On peut alors écrire :

$$u_{n+1} = u(x + a, t)$$

$$u_{n-1} = u(x - a, t)$$

29. Écrire les développements de Taylor, à l'ordre 2 au voisinage de x , de $u(x + a, t)$ et $u(x - a, t)$.

30. En reprenant l'équation de la question 21, montrer que la fonction $u(x, t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

On exprimera V en fonction de a , β et m . Quelle est la dimension de V ?

31. Calculer la valeur numérique de V pour un cristal de silicium avec $a = 4,0 \times 10^{-10}$ m, $\beta = 25 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $M = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Calculer également la valeur de $f_M = \frac{\omega_M}{2\pi}$. Cela correspond-il au domaine audible ?

FIN DU SECOND PROBLÈME — FIN DE L'ÉPREUVE