

Epreuve de fin d'année 2024

Première composition de physique Lundi 17/06/2024 durée : 4h Classes de PCSI

- *L'utilisation de la calculatrice est autorisée.*
- *Aucun document n'est autorisé.*
- *Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction dans la notation.
En particulier, on prendra soin de bien exprimer les résultats littéraux en fonction des données du problème avant toute application numérique.*
- *Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiatives et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.*

Conseil général : on prendra soin de reprendre l'ensemble du sujet, à l'aide de la correction si nécessaire, avant la rentrée 2024 en deuxième année.

Les bouées houlographes Waverider (tiré du sujet centrale MP-2022)



Figure 1 : Photographies d'un bouée holographe Waverider

Depuis la fin des années 1960, la société néerlandaise Datawell développe des bouées houlographes commercialisées sous le nom de Waverider. Flottant à la surface de la mer, une telle bouée se déplace au gré des vagues de sorte qu'en enregistrant son mouvement, on accède aux caractéristiques de la houle. Le fonctionnement du Waverider repose sur une ingénieuse combinaison de principes physiques que ce problème aborde à travers des modèles simples.

Les parties constituant cet énoncé sont largement indépendantes.

I. La plateforme stabilisatrice

Le Waverider est muni d'un accéléromètre uniaxe qui mesure la projection de l'accélération $\vec{a}_w$ de la bouée sur une direction particulière $\vec{u}_z$. Cette direction est liée à l'accéléromètre : si celui-ci se réoriente dans l'espace, le vecteur $\vec{u}_z$ se modifie généralement et l'accéléromètre mesure la projection de $\vec{a}_w$ sur une nouvelle direction. Cependant, afin d'accéder à la hauteur des vagues, ce sont les accélérations verticales qu'il convient de mesurer et il est donc impératif que la direction sensible de l'accéléromètre, définie par le vecteur $\vec{u}_z$, demeure en permanence colinéaire à l'accélération de pesanteur $\vec{g}$. Il s'agit d'une véritable gageure car l'accéléromètre est embarqué dans une bouée sujette à des mouvements complexes provoqués par les vagues. Pour maintenir fixe l'orientation de l'accéléromètre malgré ces mouvements perturbateurs, celui-ci est placé sur une plateforme stabilisatrice pendulaire. Ce dispositif, protégé par des brevets, est au coeur de la technologie Waverider. La figure 2 montre une photographie et donne une description sommaire de la plateforme stabilisatrice.

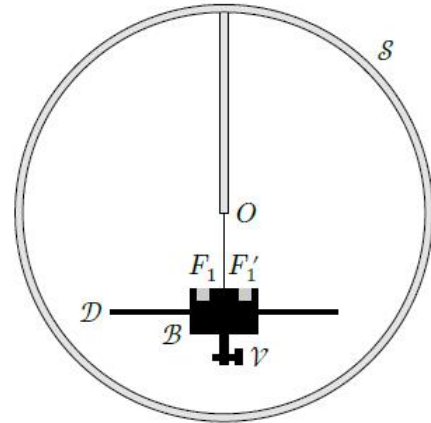


Figure 2 : Plateforme stabilisatrice

La plateforme stabilisatrice est enfermée dans une sphère transparente $\mathcal{S}$ (figure 2), elle-même placée dans la bouée. Attention à ne pas confondre la sphère $\mathcal{S}$ et la coque de la bouée qui est, elle aussi grossièrement sphérique.

L'accéléromètre (non représenté) est solidaire d'un bloc en plastiques $\mathcal{B}$ prolongé vers le bas par une tige de même matériau, elle-même traversée par une vis en métal $\mathcal{V}$ que l'on peut enfoncer plus ou moins pour la déplacer de droite à gauche. Dans sa partie supérieure, le bloc est évidé sur deux régions F_1 et F'_1 et les cavités sont comblées avec un matériau moins dense. L'ensemble est fixé sur un disque $\mathcal{D}$ constituant la plateforme proprement dite, puis suspendu par un fil très fin au centre O de la sphère $\mathcal{S}$, lui-même lié rigidement à la paroi sphérique par une tige. La sphère est enfin remplie d'un liquide judicieusement choisi.

I.1 Préliminaires sur la poussée d'Archimède

Q1) On considère un solide dans un référentiel galiléen. Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce solide, initialement au repos, soit à l'équilibre dans ce référentiel.

Q2) Montrer que l'ensemble des forces de pesanteur s'appliquant en chacun d'un point d'un solide, de masse totale m_{tot} , peut être remplacé par une unique force résultante $m_{tot}\vec{g}$ s'appliquant en son seul centre de masse G .

Q3) L'énoncé de la loi d'Archimède est le suivant :

Soit un fluide en équilibre dans le champ de pesanteur. Un corps immergé dans ce fluide subit de la part du fluide des forces de pression dont la résultante est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé (poussée d'Archimède). Cette poussée s'applique au centre de masse du fluide déplacé.

Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen, on considère un solide de volume V complètement immergé dans un fluide de masse volumique μ . Démontrer la loi d'Archimède.

Q4) Afin de vérifier la loi d'Archimède, on réalise l'expérience suivante (figure 3) : un vase rempli d'eau est placé sur une balance tarée. On immerge ensuite une bouteille cylindrique en plastique à fond plat dans l'eau sur une certaine hauteur h en la maintenant dans la main. On constate que la balance indique une masse de 330 g.

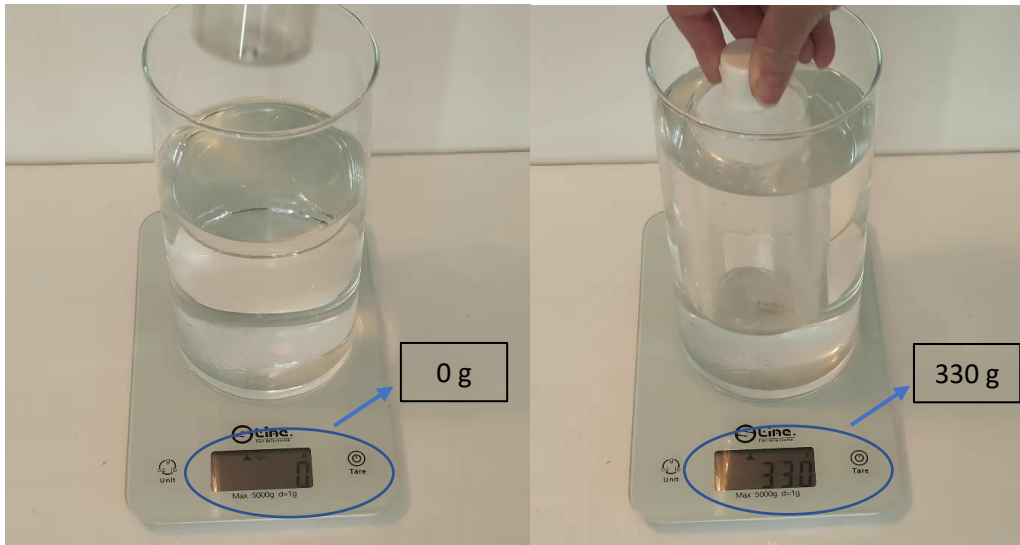


Figure 3 : Expériences sur la poussée d'Archimède
(www.physiqueludique.fr)

Interpréter l'expérience et vérifier expérimentalement que la loi d'Archimède donne la bonne expression de la résultante de la force de pression exercée par l'eau sur la bouteille.

La bouteille est immergée sur une hauteur de $h = 14 \text{ cm}$ et a un diamètre extérieur $D = 5,5 \text{ cm}$.

I.2 Horizontalité statique de la plateforme

Les éléments F_1 et F'_1 et $\mathcal{V}$ ont pour rôle d'assurer l'horizontalité statique de la plateforme. Pour comprendre le principe du dispositif, on considère un système modèle Σ constitué des trois parties (figure 4) :

- un solide homogène S_0 de volume V_0 de centre de masse G_0 , formé d'un matériau de masse volumique ρ_0 modélisant le bloc en plastique $\mathcal{B}$ et le disque $\mathcal{D}$
- un solide homogène S_1 de volume V_1 , de centre de masse G_1 et de masse volumique $\rho_1 < \rho_0$ modélisant F_1 et F'_1
- un solide homogène S_2 de volume V_2 , de centre de masse G_2 et de masse volumique $\rho_2 > \rho_0$ modélisant la vis $\mathcal{V}$ et les parties métalliques de l'accéléromètre.

L'ensemble est suspendu par un fil fixé en C et immergé dans un liquide, choisi de telle manière que sa masse volumique ρ_ℓ soit proche de ρ_0 . Pour simplifier, dans la suite de cette sous-partie I.2, on prend $\rho_\ell = \rho_0$ même si un léger écart existe entre ces deux grandeurs. On se limite à une description bidimensionnelle dans le plan de la figure 4 et on envisage une possible inclinaison du système Σ par rotation autour de l'axe $(C, \vec{u}_y)$, le fil restant toujours vertical (il ne touche le solide S_0 qu'en C).

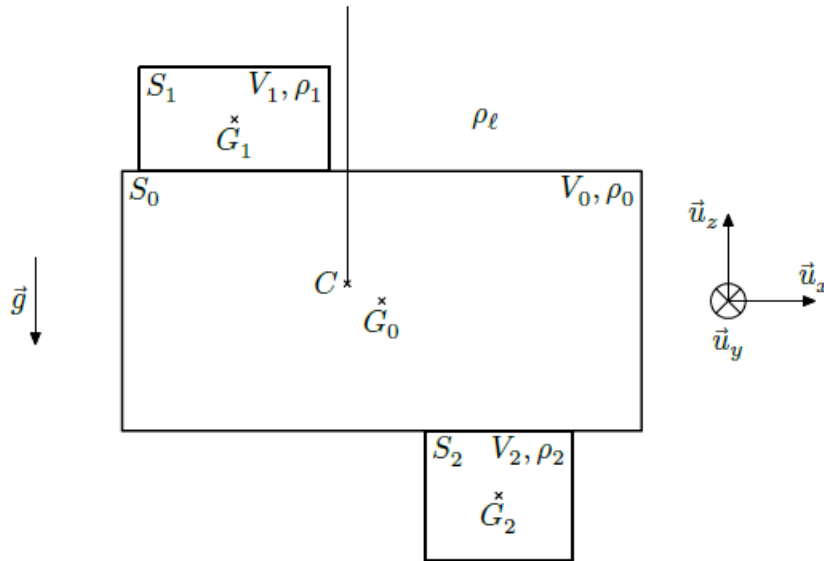


Figure 4 : Modélisation de la plateforme par un système Σ en trois parties

On note $\vec{\pi}_0$ (respectivement $\vec{\pi}_1$ et $\vec{\pi}_2$) la poussée d'Archimède appliquée en G_0 (respectivement G_1 et G_2) que subirait le solide immergé S_0 (respectivement S_1 et S_2) en l'absence des deux autres solides (le liquide l'entourant complètement). On admet que la poussée d'Archimède due au liquide sur le système Σ peut être remplacé par les trois forces $\vec{\pi}_0$, $\vec{\pi}_1$ et $\vec{\pi}_2$.

Q5) Exprimer la résultante $\vec{R}$ et le moment $\vec{\Gamma}_C$ en C des forces de pression et de pesanteur que Σ subit en fonction des grandeurs $\rho_1, \rho_\ell, \rho_2, V_1, V_2$ et $\vec{CG}_1, \vec{CG}_2$ et $\vec{g}$.

Q6) Les sous-systèmes S_1 et S_2 procurent respectivement à Σ une propension à flotter ou à couler. A quelle condition ces effets antagonistes se compensent-ils ? Exprimer la réponse sous la forme d'une relation entre $\rho_1, \rho_\ell, \rho_2, V_1$ et V_2 .

Q7) La relation précédente est supposée satisfaite. Montrer que le moment en C des forces s'exerçant sur l'ensemble Σ s'exprime sous la forme : $\vec{\Gamma}_C = M_m \vec{G_1 G_2} \wedge \vec{g}$ et donner l'expression de M_m en fonction de ρ_ℓ, ρ_2 , et V_2 et préciser le signe de ce coefficient M_m .

Q8) Dédire de la relation précédente l'orientation prise par le vecteur $\vec{G_1 G_2}$ à l'équilibre stable de Σ . Discuter la stabilité de l'équilibre à l'aide d'un ou de plusieurs dessins pertinents.

Q9) En revenant au système réel de la figure 2, expliquer le rôle de la vis $\mathcal{V}$.

I.3 Oscillations du pendule et longueur effective

Dans cette partie, on suppose la sphère $\mathcal{S}$ et le point O fixes dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ et on étudie un mouvement pendulaire de la plateforme $\mathcal{D}$ dans le cadre d'un modèle simplifié. On considère que le liquide entourant le système Σ a une masse volumique $\rho_\ell < \rho_0$.

La plateforme et ses accessoires sont remplacés par un solide Σ_0 quasi-ponctuel de volume V_0 et de masse volumique ρ_0 immergé dans le liquide de masse volumique $\rho_\ell < \rho_0$, suspendu en O par un fil

souple de longueur ℓ et de direction indiquée par un angle θ (figure 5). On suppose que le mouvement de Σ_0 ne s'effectue que dans le plan (Oxz) .

On utilise encore la loi d'Archimède pour exprimer la résultante des forces du liquide sur le solide Σ_0 malgré les mouvements de celui-ci ; on néglige donc notamment dans cette sous-partie toute force de frottements due au liquide sur le solide.

On augmente l'inertie du solide Σ_0 pour tenir compte du fait qu'il entraîne dans son déplacement du liquide qui se trouve autour de lui : pour ce faire, on affecte à Σ_0 une masse effective m_{eff} uniquement pour le calcul de ses éléments cinétiques (*quantité de mouvement, moment cinétique, énergie cinétique*). Cette masse effective est supposée constante et est bien supérieure à la masse réelle de la plateforme et de ses accessoires. Cette masse effective n'intervient pas dans l'expression du poids de Σ_0 qui ne dépend que de sa masse réelle $m = \rho_0 V_0$.

On suppose que l'axe (Oz) est la direction verticale ascendante. On prendra comme sens positif des angles celui associé à l'axe (Oy) (figure 5). On prendra dans le problème : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

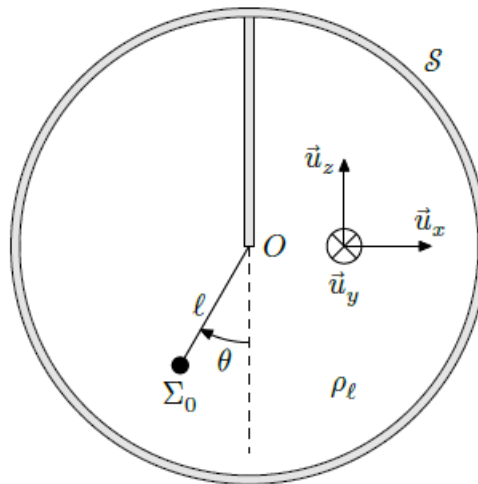


Figure 5 : Modélisation de la plateforme en pendule simple

Q10) Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$ dans l'approximation des petits angles. Identifier une pulsation propre ω_0 de la forme $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell_{eff}}}$ et donner l'expression de ℓ_{eff} en fonction de ℓ , m_{eff} et de la masse apparente $m_{app} = (\rho_0 - \rho_\ell)V_0$.

Q11) L'auteur du brevet original estime que le volume de fluide entraîné par le pendule est égal à $20 V_0$, de sorte que $m_{eff} = \rho_0 V_0 + 20\rho_\ell V_0$. La masse volumique du fluide est de 1% inférieure à ρ_0 . Sous ses hypothèses, comparer la période propre T_0 du pendule à celle $T_{0 \text{ vide}}$ que l'on observerait en l'absence de liquide.

Q12) Dans les brochures commerciales Datawell, on peut lire la phrase suivante : *la période propre d'oscillations de la plateforme est de l'ordre de 40 s, ce qui correspondrait à un pendule de 400 m*. Cette affirmation vous paraît-elle cohérente ? Peut-on estimer la longueur réelle ℓ ?

I.4 Effet stabilisateur

On rappelle que la sphère de la figure 2 est embarquée dans une bouée. Sous l'effet de la houle, son centre O subit en plus des accélérations verticales à mesurer, des accélérations horizontales perturbatrices.

Comme dans la sous-partie I.2, on représente la plateforme par un pendule simple et on étudie ses oscillations repérées par l'angle $\theta(t)$. On envisage une situation dans laquelle le point de fixation O subit, par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen, une accélération $\vec{a} = a(t)\vec{u}_x$. Dans la suite, on raisonne dans le référentiel $\mathcal{R}_S$ d'origine O et dont les axes sont parallèles à ceux de $\mathcal{R}_T$. L'effet de masse effective intervient comme dans la partie I.2. On prend en compte de surcroît une force de frottement visqueux de type $\vec{F}_v = -\beta \vec{v}$ sur le solide Σ_0 de vitesse $\vec{v}$.

Q13) Caractériser le mouvement du référentiel $\mathcal{R}_S$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}_T$. Ce référentiel est-il galiléen ?

Dans le nouveau référentiel d'étude $\mathcal{R}_S$, on admet deux résultats dans le bilan des forces s'exerçant sur le système Σ_0 :

- La poussée d'Archimède a une nouvelle expression par rapport à celle que donne la loi d'Archimède de la question 3 : $\vec{\pi}_0 = (\rho_\ell V_0 g \vec{u}_z + \rho_\ell V_0 a(t) \vec{u}_x)$.
- Le système Σ_0 subit une nouvelle force, appelée force d'inertie d'entraînement dont l'expression est $\vec{F}_{ie} = -\rho_0 V_0 a(t) \vec{u}_x$.

Q14) En admettant que, dans le nouveau référentiel $\mathcal{R}_S$, on peut appliquer le théorème du moment cinétique au système Σ_0 par rapport à l'axe (Oy) , moyennant de tenir compte des modifications précisées précédemment dans le bilan des forces, déterminer la nouvelle équation du mouvement du système Σ_0 .

Dans l'approximation des petits angles, démontrer que l'équation du mouvement du pendule a dorénavant la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{a(t)}{\ell_{eff}}.$$

Donner l'expression du facteur de qualité Q en fonction de m_{eff} , β et ω_0 .

On procède à une étude de la réponse harmonique du pendule : l'accélération $a(t)$ est supposée sinusoïdale à la pulsation ω : $a(t) = \text{Re}(a_0 e^{j\omega t})$ et on pose : $\theta(t) = \text{Re}(\underline{\theta}_m e^{j\omega t})$.

Q15) Exprimer $\underline{\theta}_m$ en fonction de a_0 , ℓ_{eff} , ω , ω_0 et Q .

On note $\underline{\theta}_0$ la valeur de $\underline{\theta}_m$ lorsque $\omega = 0$ et on pose $\underline{H} = \frac{\underline{\theta}_m}{\underline{\theta}_0}$.

Q16) Donner l'expression de $\underline{H}$. A quel type de filtre une telle fonction de transfert est-elle associée ?

Q17) Quelle expression $\underline{H}_1$ la fonction de transfert prendrait-elle si le pendule oscillait dans l'air, le liquide étant absent en fonction de ω , g et ℓ ? On néglige dans ce cas les effets de viscosité et tout autre phénomène dissipatif.

Le Waverider est conçu pour détecter une houle de fréquence comprise entre 0,03 Hz et 1,0 Hz. La figure 6 représente la partie gain des diagrammes de Bode correspondant aux fonctions de transfert $\underline{H}$ et $\underline{H}_1$.

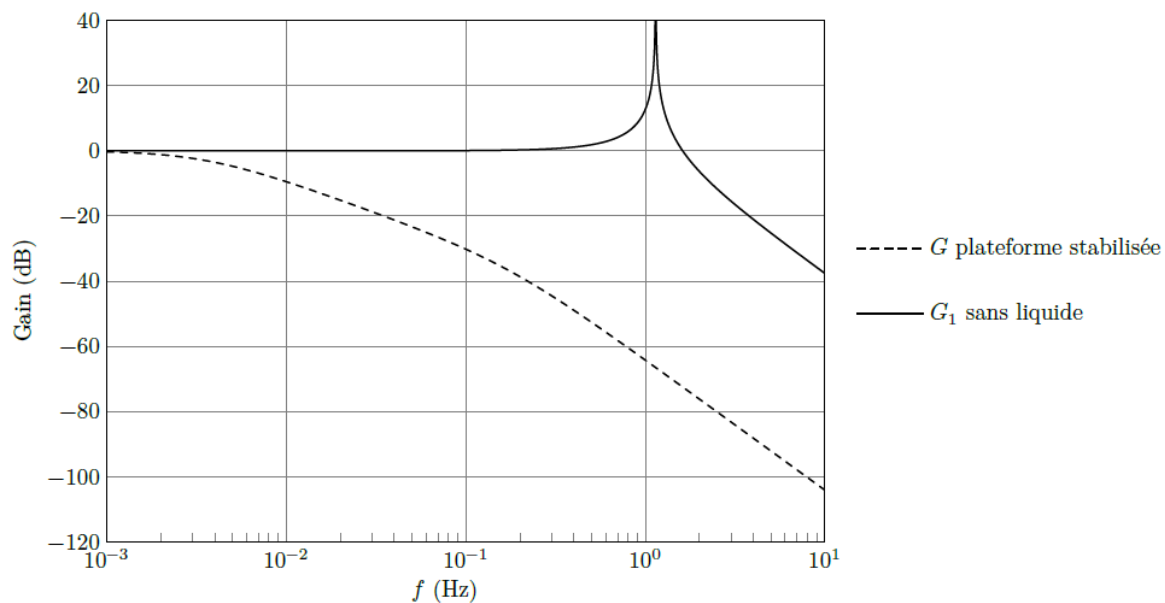


Figure 6 : Diagrammes de Bode pour le gain de $\underline{H}$ et $\underline{H}_1$.

Q18) Commenter ces courbes. Quelle inclinaison maximale (en degrés) atteint-on si $a_0 = 1,0 \text{ m.s}^{-2}$.

II. Traitement du signal

L'accéléromètre fournit une tension $U(t)$, polluée par du bruit dont les composantes spectrales de fréquences supérieure à 1 Hz nuisent aux mesures sans apporter aucune information sur l'état de la mer. On applique donc un filtrage analogique sur cette tension pour obtenir une tension U_s à exploiter.

Q19) Parmi les trois filtres A, B, C représentés sur la figure 7, déterminer celui qui convient. Justifier la réponse.

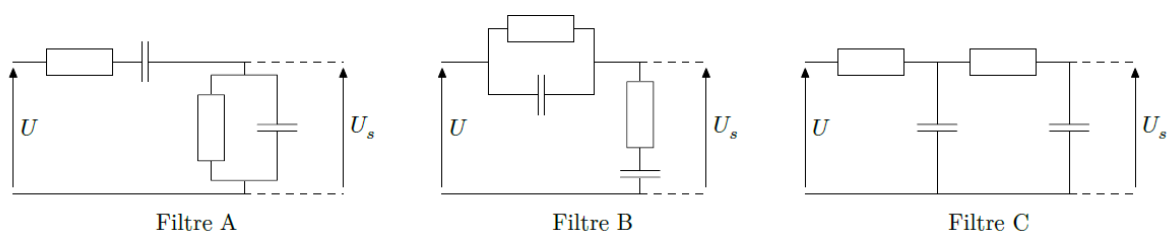


Figure 7 : Exemples de filtres analogiques composés de résistances et de condensateurs

Q20) Les deux résistances présentent la même valeur R et les deux condensateurs la même capacité C . Déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}_2$ du filtre sous forme canonique. On considèrera la sortie du filtre ouverte.

Q21) Donner, en fonction des données, les trois grandeurs caractéristiques du filtre : A_2 (gain basses fréquences), f_2 (fréquence caractéristique) et Q_2 (facteur de qualité). Proposer des valeurs numériques pour R et C .

Un expérimentateur a réalisé le filtre désiré avec les valeurs des composants suivantes : $R = 1,0\text{ k}\Omega$ et $C = 22\text{ nF}$ (non conformes aux valeurs attendues dans la question 21). Les valeurs des composants sont annoncées par le constructeur ayant une précision de 5%.

La tension $U(t)$ correspond à la tension d'entrée et la tension $U_s(t)$ à la tension de sortie du filtre.

Q22) Donner la valeur numérique de la fréquence caractéristique f_2 théorique de ce filtre ainsi que son incertitude. Présenter le résultat final sous la forme usuelle attendue. On supposera dans la suite les incertitudes sur les valeurs théoriques du gain basses fréquences A_2 et du facteur de qualité Q_2 nulle.

Q23) Indiquer ce l'on mesure avec un voltmètre en mode AC ?

Afin de s'assurer que le montage fonctionne bien. L'expérimentateur souhaite d'abord mesurer le gain du montage à « bases fréquences ». Pour ce faire, il relie un générateur de tension sinusoïdale à l'entrée de son montage et effectue des mesures de tensions avec un multimètre en mode AC à l'entrée (tension $U(t)$) et à la sortie (tension $U_s(t)$), le tout à la fréquence de 50 Hz.

Il lit sur le voltmètre pour la mesure de « la tension d'entrée » : 1,7685 V et pour la mesure de la « tension de sortie » : 1,7543 V.

Q24) Déterminer le gain basses fréquences expérimental du filtre ainsi que son incertitude type. Comparer quantitativement la valeur mesurée à la valeur théorique attendue et conclure.

L'extrait de la notice du multimètre utilisé est présenté figure 8.

AC specifications for U1271A

Function	Range	Resolution	Accuracy $\pm$ (% of reading + counts of least significant digit)			
			45 Hz to 65 Hz	30 Hz to 1 kHz	1 kHz to 5 kHz	5 kHz to 20 kHz
True RMS AC Voltage ¹	300 mV	0.01 mV	0.7 + 20	1.0 + 25	2.0 + 25	2.0 + 40
	3 V	0.0001 V	0.7 + 20	1.0 + 25	2.0 + 25	2.0 + 40
	30 V	0.001 V	0.7 + 20	1.0 + 25	2.0 + 25	2.0 + 40
	300 V	0.01 V	0.7 + 20	1.0 + 25	2.0 + 25	—
	1000 V	0.1 V	0.7 + 20	1.0 + 25	—	—
	LPF (low pass filter) enabled, applicable for all voltage ranges and resolution		0.7 + 20	1.0 + 25 @ < 200 Hz 5.0 + 25 @ < 440 Hz	—	—

Figure 8 : Extrait de la notice constructeur dans le cas de mesures en tensions en mode AC – multimètre Keysight U1271A

Q25) L'expérimentateur mesure comme fréquence caractéristique : $f_2 = (7,52 \pm 0,04)\text{ kHz}$. Comparer quantitativement sa mesure à la valeur théorique attendue. Conclure.

Q26) Pour vérifier que le facteur de qualité Q_2 expérimental de son filtre correspond à ce qui est attendu théoriquement, l'expérimentateur décide de réaliser une mesure de déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée. Le GBF délivre une tension sinusoïdale à la fréquence $f = 12,0\text{ kHz}$. La tension d'entrée du filtre est reliée à la voie 1 de l'oscilloscope et la tension de sortie à la voie 2.

L'oscillogramme obtenu est représenté figure 9. En exploitant la figure 9, donner une mesure du déphasage cherché (en degrés) en explicitant bien la démarche choisie. Puis en déduire une mesure du facteur de qualité Q_2 du filtre.

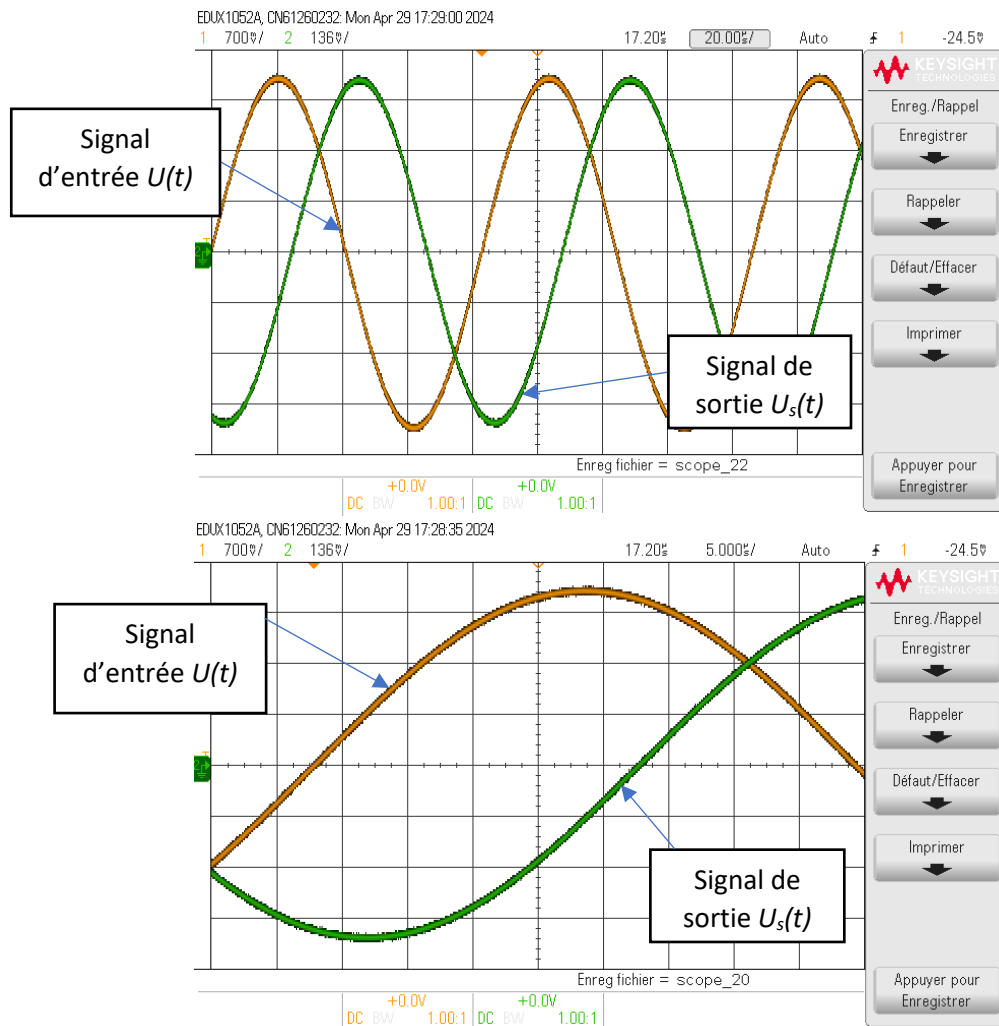


Figure 9 : Oscillogrammes observés.
Le GBF délivre une tension sinusoïdale à la fréquence de 12,0 kHz.

L'expérimentateur choisit finalement de réaliser un filtre actif contenant un amplificateur opérationnel (voir le schéma du montage sur la figure 10) avec les valeurs des composants suivantes : $C_1 = 220 \text{ nF}$, $C_2 = 1,0 \text{ nF}$, $R = 1,0 \text{ k}\Omega$.

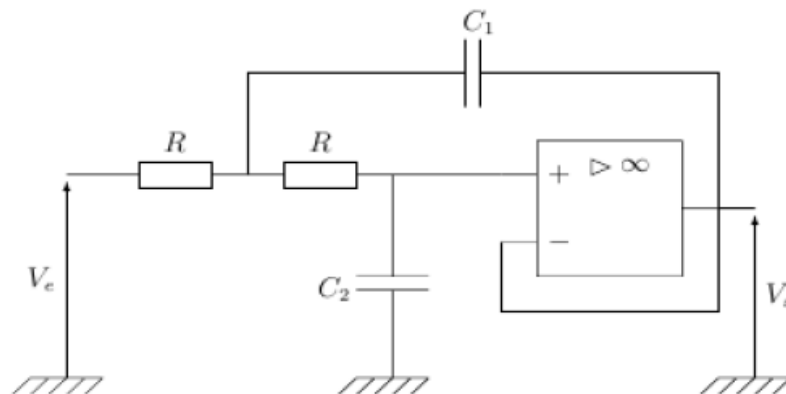


Figure 10 : Filtre actif réalisé

Q27) Etudier le comportement asymptotique du filtre (basses fréquences et hautes fréquences) à l'aide de schémas et en déduire la nature du filtre.

On peut montrer que la fonction de transfert de ce filtre peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H_3} = \frac{A_3}{1 + j\frac{\omega}{\omega_3 Q_3} - \frac{\omega^2}{\omega_3^2}}.$$

L'expérimentateur connecte à l'entrée du filtre un générateur basses fréquences délivrant une tension crête à crête (0-5V), de fréquence $f = 140 \text{ Hz}$. Il observe les oscillogrammes présentés figure 11, la tension crête à crête $V_e(t)$ étant reliée à la voie 1 de l'oscilloscope et la tension de sortie $V_s(t)$ à la voie 2.

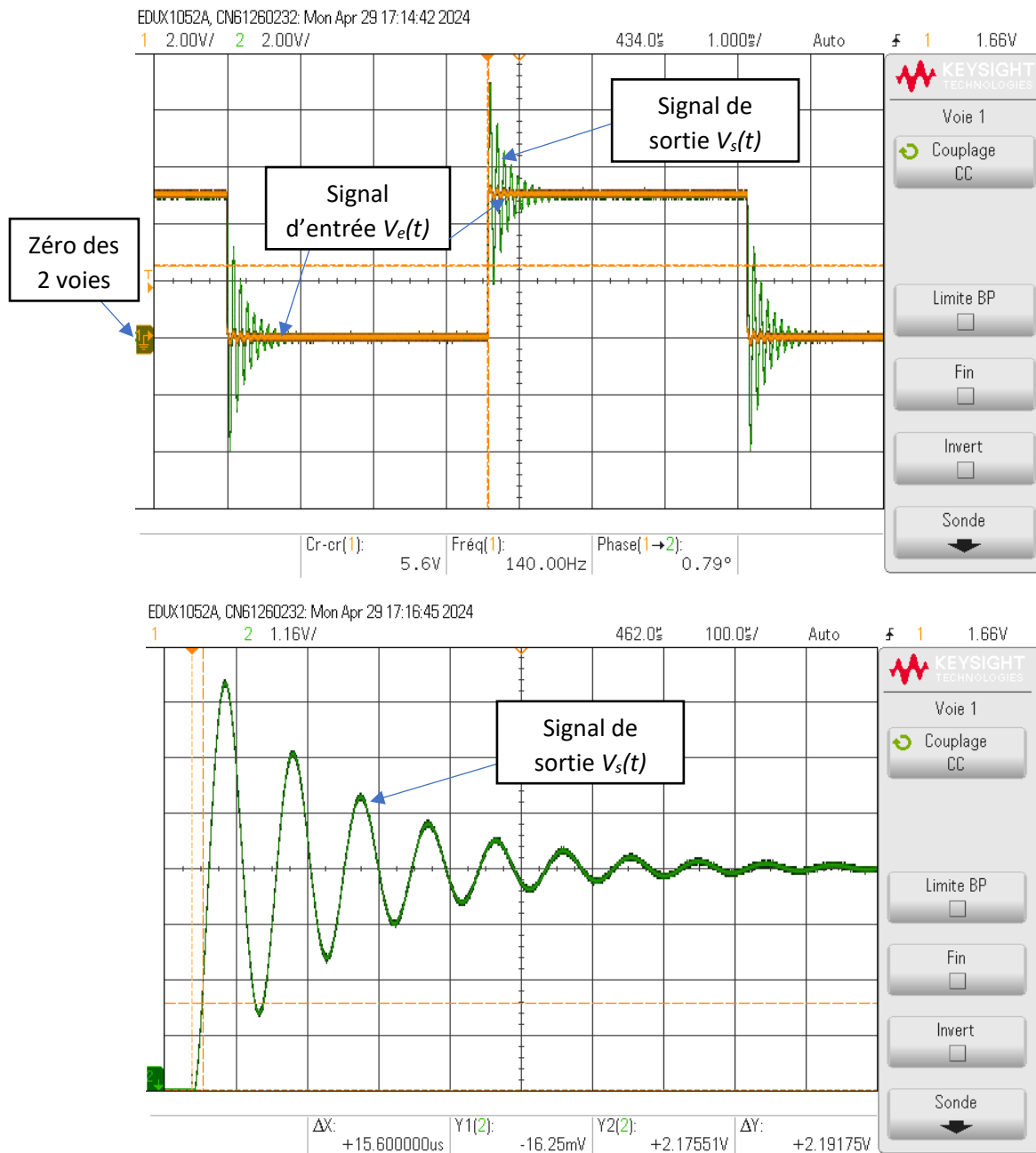


Figure 11 : Oscillogrammes obtenus avec le filtre actif (signal d'entrée crête à crête (0-5 V) à une fréquence de 140 Hz)

Q28) Déterminer l'équation différentielle reliant la tension d'entrée $V_e(t)$ et la tension de sortie $V_s(t)$.

Q29) Dédire de la lecture de ces oscillogrammes la mesure des trois grandeurs caractéristiques : gain basses fréquences A_3 , fréquence caractéristiques f_3 et facteur de qualité Q_3 du filtre. On expliquera bien la démarche suivie pour l'évaluation de chacune des grandeurs.

III. Mesure de l'inclinaison de la bouée

Afin de déterminer la direction des vagues, certains Waberiders sont équipés de deux autres accéléromètres, non pas placés sur la plateforme comme le premier, mais rigidement liés à la bouée. Lorsque la bouée s'incline sous l'effet de la houle, ces accéléromètres s'inclinent donc aussi. Afin de projeter dans le plan horizontal et sur l'axe vertical les accélérations qu'ils mesurent, il faut déterminer leur orientation relativement à la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ définie par la plateforme et son fil de suspension vertical. La mesure des deux angles est pour cela nécessaire, mais nous nous limiterons ici au seul angle φ (figure 12).

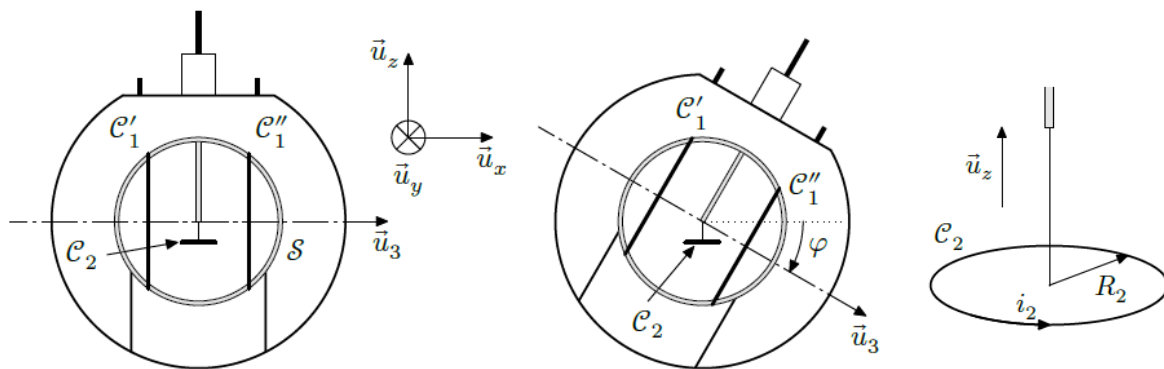


Figure 12 : La bouée, la sphère $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}_1'$ et $\mathcal{C}_1''$ s'inclinent alors que $\mathcal{C}_2$ se maintient horizontale et le fil de suspension vertical. A droite : vue agrandie en trois dimensions de la bobine-sonde $\mathcal{C}_2$.

La mesure de φ s'appuie sur un effet de couplage électromagnétique dans un système de bobines :

- Une paire de bobines plates $\mathcal{C}_1 = \{\mathcal{C}_1' \text{ et } \mathcal{C}_1''\}$ est collée à la paroi extérieure de la sphère $\mathcal{S}$. Leur axe de révolution commun est dirigé par le vecteur unitaire $\vec{u}_3$.
- Une bobine sonde $\mathcal{C}_2$ est fixée sur la plateforme de manière que son axe de symétrie soit confondu avec le fil de suspension vertical.

III.1 Champ magnétique créé par les bobines de Helmholtz

Les deux bobines plates identiques $\mathcal{C}_1'$ et $\mathcal{C}_1''$ sont placées dans la configuration dite « de Helmholtz » : assimilables à deux cercles de centres O'_1 et O''_1 , elles possèdent le même axe de révolution, sont formées chacune de N_1 spires parcourues par un courant d'intensité i_1 et sont séparées d'une distance égale à leur rayon R_1 (figure 13). Le point Ω est au milieu du segment formé par les points O'_1 et O''_1 .

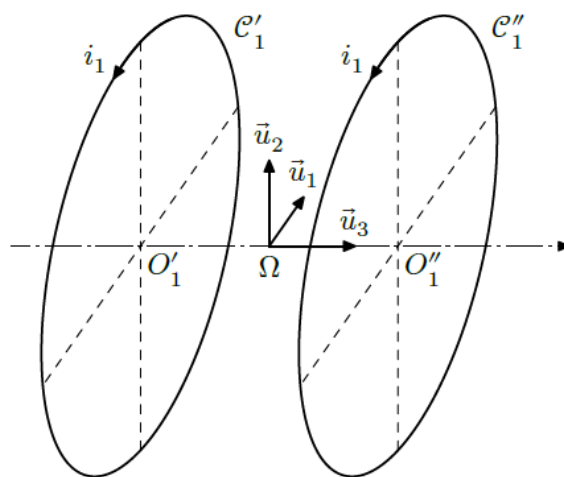


Figure 13 : Les bobines de Helmholtz. Les vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ forment une base orthonormée directe.

Un calcul numérique du champ magnétique a été conduit avec les paramètres $R_1 = 20$ cm et $N_1 i_1 = 1,0$ A. Ses résultats figurent sur la figure 14. Il s'agit d'une carte de champ.

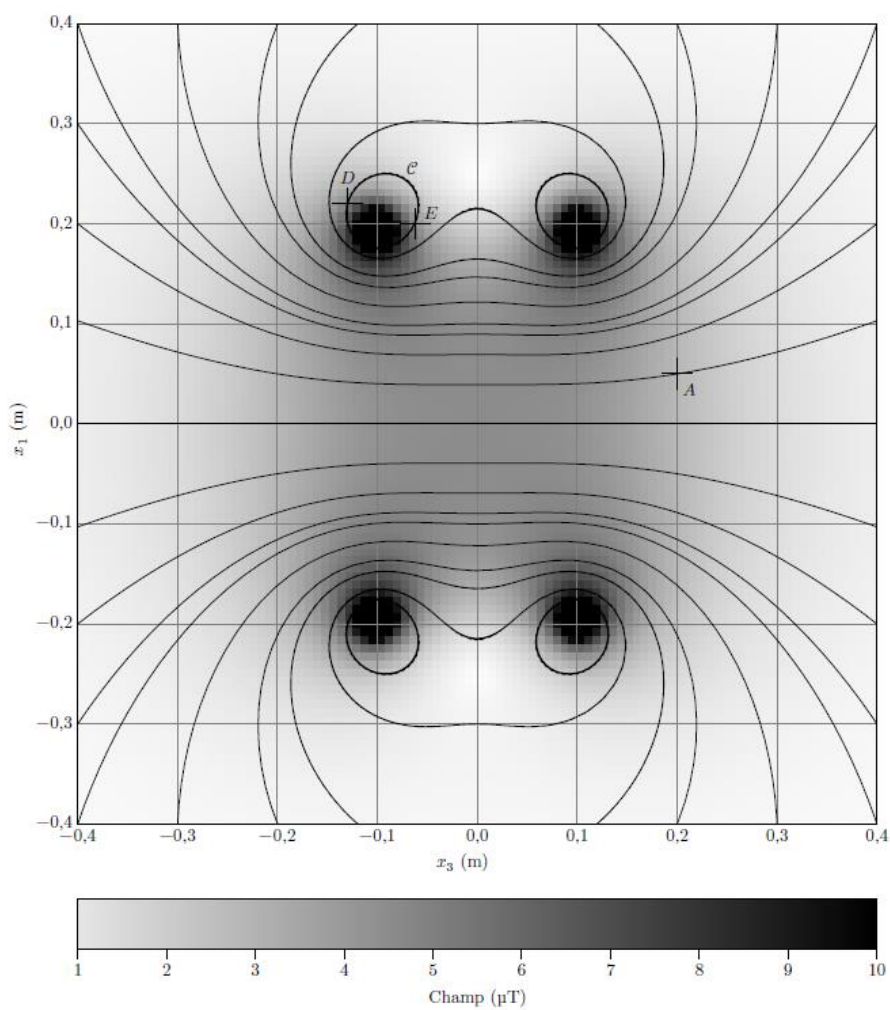


Figure 14 : Carte de champ magnétique créé par les bobines de Helmholtz

Q30) Comme il est difficile de représenter le champ magnétique en trois dimensions, la figure 14 se limite au plan $(\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_3)$. Expliquer pourquoi cela ne constitue pas une perte d'informations.

Q31) Préciser la direction du champ magnétique en un point du plan $(\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$. La direction de ce champ était-elle prévisible et par quels arguments ? Indiquer comment il faut orienter les lignes de champ de cette carte.

Q32) Identifier les zones de champ uniforme, de champ faible, de champ fort. On justifiera bien sa réponse.

Q33) La bobine $\mathcal{C}_2$ a un rayon $R_2 = 5,0 \text{ cm}$. Est-ce légitime de supposer que le champ magnétique créé par les bobines de Helmholtz est uniforme sur la surface du circuit $\mathcal{C}_2$? On fera cette hypothèse dans la suite.

On admet pour la suite l'expression du champ magnétique créée sur l'axe : $B = \mu N_1 i_1$ au niveau de Ω .

III.2 Exploitation du couplage électromagnétique

La bobine sonde $\mathcal{C}_2$ présente un rayon R_2 et une inductance propre L_2 . Elle est formée de N_2 spires de cuivre, chacune parcourue par un courant d'intensité i_2 enroulées dans le sens de rotation positif par rapport à $\vec{u}_2$. On note L_1 l'inductance propre de $\mathcal{C}_1$ et on néglige les résistances de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Q34) Rappeler la définition du coefficient de mutuelle inductance M entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Exprimer ce coefficient en fonction de N_1, N_2, R_2, μ et h .

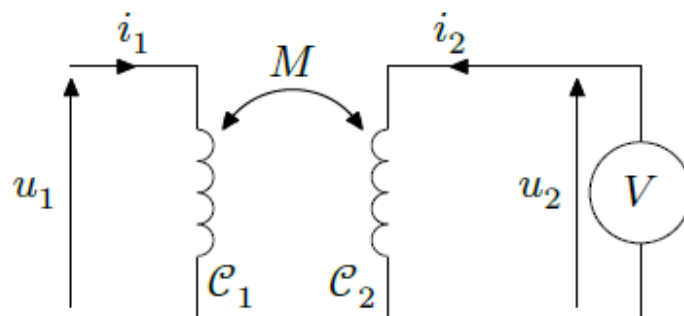


Figure 15 : Schéma du circuit réalisé

On applique une tension alternative $u_1(t) = U_{1m} \cos(\omega t)$ aux bornes de $\mathcal{C}_1$. La bobine $\mathcal{C}_2$ est connectée à un voltmètre de très grande impédance d'entrée.

Q35) Exprimer les tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ en fonction des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

Q36) A quelle simplification peut-on procéder en tenant compte de la très grande impédance du voltmètre ? En déduire une relation entre u_1, u_2, L_1 et M .

Q37) Application numérique $U_{1m} = 5,00 \text{ V}$, $U_{2m} = 170 \text{ mV}$, $L_1 = 3,6 \text{ mH}$, $R_2 = 5,0 \text{ cm}$, $N_1 = 50$, $N_2 = 200$, $\mu = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ T.A}^{-1}$. Calculer le coefficient de mutuelle inductance M (en valeur absolue) et l'angle d'inclinaison φ (supposé positif) en degrés.